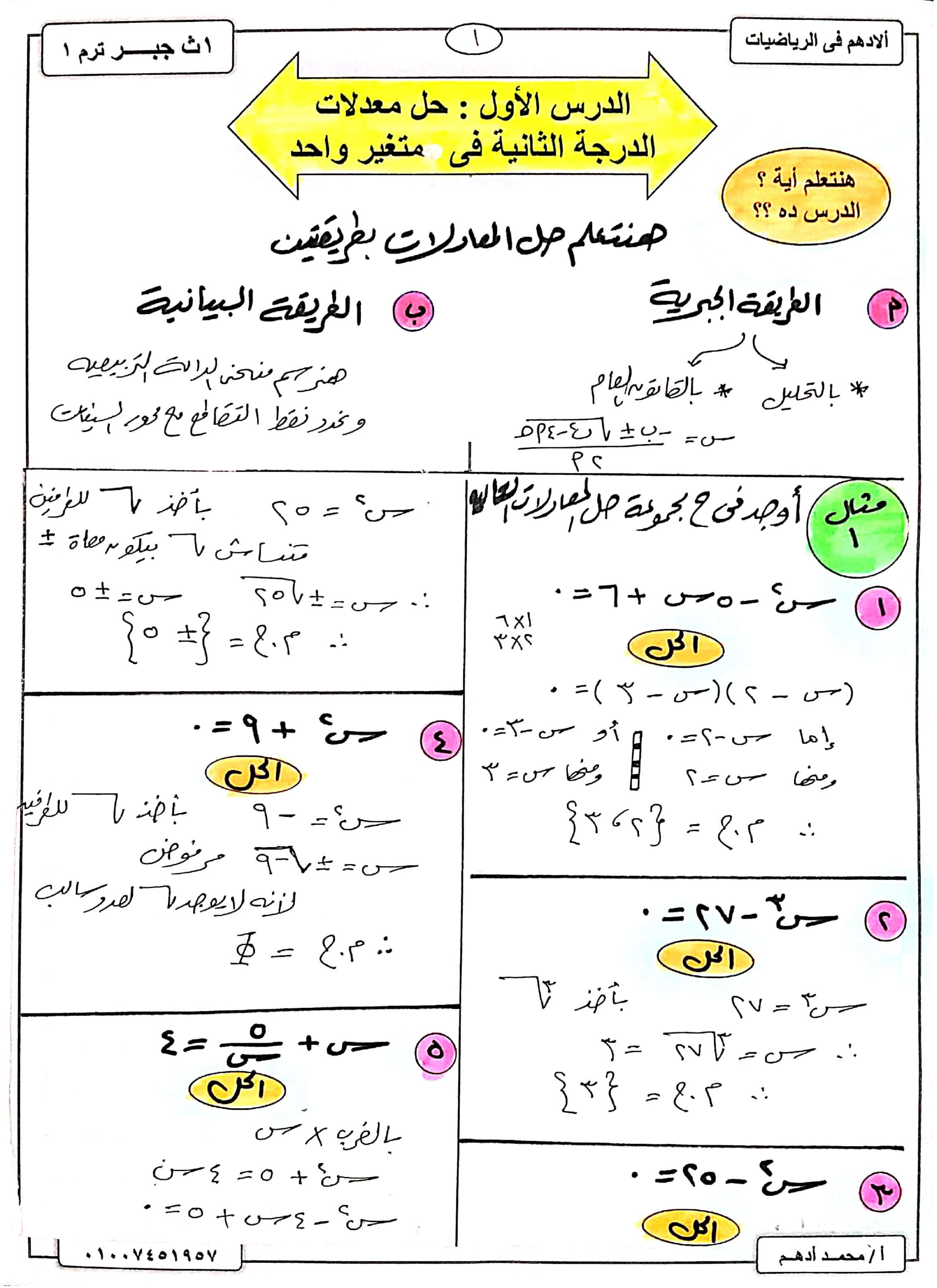


الأدهم
فى
الجبر وحساب المثلثات
الصف الأول الثانوى
٢٠٢٠
عام وأزهر
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧



الدرس الأول : حل معدلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

هنتعلم أية ؟ الدرس ده ؟؟

هنتعلم حل المعادلات بطريقتين

(أ) الطريقة الجبرية
* بالتحليل * بالقانون العام

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}}{٢ أ}$

(ب) الطريقة البيانية
هنرسم منحنى الدالة التربيعية ونحدد نقط التقاطع مع محور السينات

مثال ١ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات التالية

(١) $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$

١ × ٦
٢ × ٣

الحل

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ ومنها $س = ٢$ أو $س - ٣ = ٠$ ومنها $س = ٣$

∴ م.ح = $\{٢ ، ٣\}$

(٢) $س^٣ - ٢٧ = ٠$

الحل

$س^٣ = ٢٧$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$

∴ $س = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

∴ م.ح = $\{٣\}$

(٣) $س^٢ - ٢٥ = ٠$

الحل

$س^٢ = ٢٥$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين متنساش $\sqrt{}$ بيكون معاه ±

∴ $س = \pm\sqrt{٢٥}$ $س = \pm ٥$

∴ م.ح = $\{\pm ٥\}$

(٤) $س^٢ + ٩ = ٠$

الحل

$س^٢ = -٩$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

$س = \pm\sqrt{-٩}$ مرفوض

لأنه لا يوجد $\sqrt{}$ لعدد سالب

∴ م.ح = $\emptyset$

(٥) $س + \frac{٥}{س} = ٤$

الحل

بالضرب × س

$س^٢ + ٥ = ٤ س$

$س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$

خلى بالك مفيش عددين حاصل ضربهما ٥ ومجموعهما ٤ لذلك دى هتتحل بالقانون العام " فاكرينه؟

$س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$

$أ = ١ \quad ب = -٤ \quad جـ = ٥$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$\therefore س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

$\because \sqrt{-٤} \notin ح$ مفيش جذر تربيعي لعدد سالب

$\therefore م.ح = \phi$

تدريب: حل المعادلات التاليه فى ح

١) $س^٢ + ٣س = ٠$

٢) $س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

٣) $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

٤) $٢س^٢ + ٣س - ٤ = ٠$

٥) $٥س^٢ - ٣س - ١ = ٠$

٦) $س - \frac{٥}{س} = ٣$ ، $س \neq ٠$

من عجائب الرياضيات
اضرب عمرك في
13837
اضرب النتيجة في 73
ستدهش للنتيجة

ثانياً: الحل البيانى

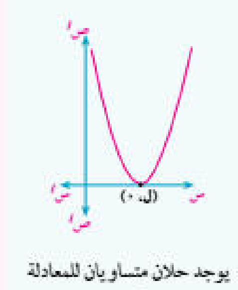
عندنا ٣ حالات

١- المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين.



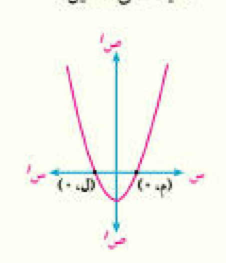
يوجد حلّان مختلفان للمعادلة في ح، مجموعة الحل = {ل، م}

٢- المنحنى يمس محور السينات في نقطة واحدة.



يوجد حلان متساويان للمعادلة في ح، مجموعة الحل = {ل}

٣- المنحنى لا يقطع محور السينات.



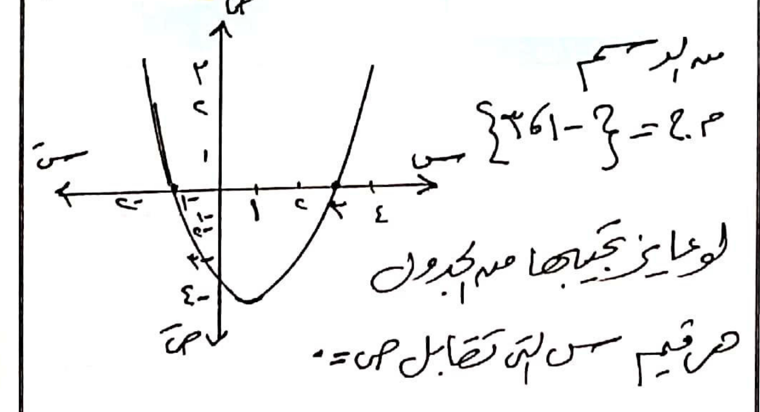
لايوجد حلّ للمعادلة في ح، مجموعة الحل = ϕ

مثال ٢: أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات التاليه بيانياً

١) $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ $[-٢ ، ٤]$

الحل

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



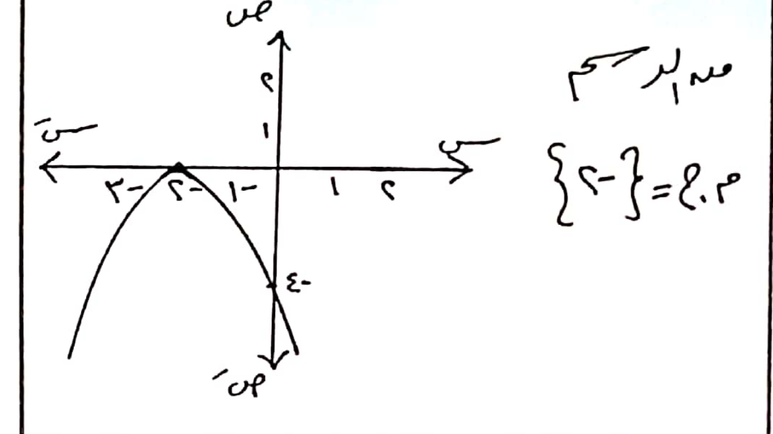
من الرسم م.ح = {-١ ، ٣}

لو عايز تجيبها من الجدول هى قيم س الى تقابل ص = ٠

٢) $س^٢ - ٤س - ٤ = ٠$ $[-٥ ، ١]$

الحل

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١
ص	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩



من الرسم

م.ح = {-٢}

مثال ٢

عين احداثيات رأس المنحنيات التالية

$س^٢ + ٢س - ١ = ٠$



الحل

أ = ١ ب = ٢

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢\times١} = \frac{-٢}{٢} = -١$

د(-١) = $(-١)^٢ + ٢(-١)$ = ١ - ٢ = -٢

∴ رأس المنحنى (-١ ، -٢)

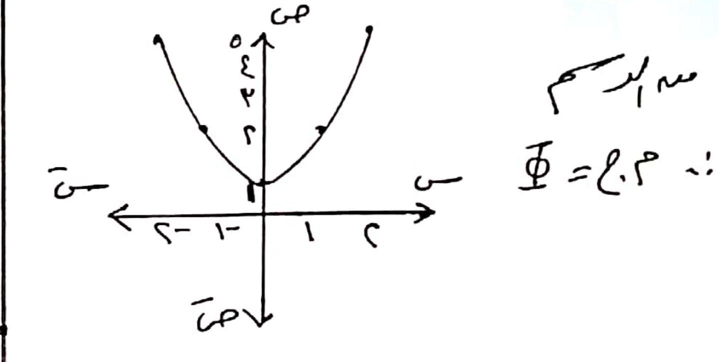
٣

$س^٢ + ١$ [-٢ ، ٢]

الحل



س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٥	٢	١	٢	٥



من الرسم

∴ م.ح = Φ

سؤال رفيع

يعنى أيه جذر للمعادلة

معناه أنى أعوض عن س بالرقم اللى قاله ويبقى قيمة المعادلة = صفر

لأن جذر المعادلة هو حل المعادلة يعنى قيمة س عندما ص = صفر

مثال ٣

إذا كان س = ٣ أحد جذري المعادلة

$س^٢ + أس + ٦ = ٠$. فأوجد الجذر الآخر

الحل

بوضع س = ٣

$٩ + ٣أ + ٦ = ٠$ ٣أ = -١٥

∴ أ = $\frac{-١٥}{٣}$ = -٥



ملحوظة

$أس^٢ + ب س + جـ = ٠$

إحداثيات رأس المنحنى

$\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

٦×١
٢×٣

∴ المعادلة هي

س² − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٢)(س − ٣) = ٠

س = ٢ أو س = ٣

∴ الجذر الآخر = ٢

مثال ٤

إذا كان ٥، −٣ هما جذرا المعادلة س² + أس + ب = ٠ فأوجد أ، ب

الحل

بوضع س = ٥

∴ ٢٥ + ٥أ + ب = ٠ ← (١)

بوضع س = −٣

٩ − ٣أ + ب = ٠ ← (٢)

٥أ + ب = −٢٥

−٣أ + ب = −٩

بالطرح

٨أ = −١٦ ∴ أ = −١٦/٨ = −٢

بالتعويض في (١)

٢٥ − ١٠ + ب = ٠

ب + ١٥ = ٠

∴ ب = −١٥

∴ أ = −٢ ، ب = −١٥

أي خدمة

مثال ٥ أكمل

(١) المعادلة (س − ٣)(س + ٤) = ٠ من الدرجة ...... الثانية

(٢) مجموعة حل المعادلة س² − ٢س = ٠ هي .....

س(س − ٢) = ٠

م.ح = {٠، ٢}

(٣) مجموعة حل المعادلة س² + ١٠٠ = ٠ في ح

س² = −١٠٠ س = √−١٠٠ مرفوض

م.ح = ∅

(٤) مجموعة حل المعادلة س² − ٥ = ٠ في ح

س² = ٥ س = ±√٥

∴ م.ح = {±√٥}

(٥) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات في (٣، ٠) ، (−٤، ٠) فإن م.ح = ----

{−٤، ٣} ← لازم تكون مجموعة

(٦) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يمر بالنقط {(−١، ٠)، (٠، −٣)، (١، −٤)، (٣، ٠)}

فإن م.ح = {−١، ٣}

قيم س عندما ص = ٠

مثال ٦

اختر الإجابة الصحيحة

(١) الشرط الذي يجعل المعادلة أ س² + ب س + جـ = ٠ تربيعية هو ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠

(جـ) أ ≠ ٠ (د) أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

---

(٢) إذا كان (ص − ٤)² = ٣٦ ، ص < ٠ فإن ص + ٤ = ...

(أ) −٢ (ب) ٢

(جـ) ١٠ (د) ١٤

الحل ← ص − ٤ = ± ٦

ص − ٤ = ٦ ، ص = ٦ + ٤ ، ص = ١٠ مرفوض

ص − ٤ = −٦ ، ص = −٦ + ٤ ، ص = −٢ ✓

∴ ص + ٤ = −٢ + ٤ = ٢

---

(٣) إذا كانت س = ٤ أحد جذري المعادلة س² + م س = ٤ فإن ...

(أ) م = −٣ (ب) م عدد زوجي

(جـ) (١ − م) مربع كامل (د) (أ) ، (جـ) صحيحان

بالتجريب م = −٣ تحقق ∴ أ صحيحة

١ − (−٣) = ٤ مربع كامل ∴ جـ صحيحة

---

(٤) الجذر المشترك للمعادلتين التربيعيتين س² − ٣ س + ٢ = ٠ ، ٢ س² − ٥ س + ٢ = ٠ هو

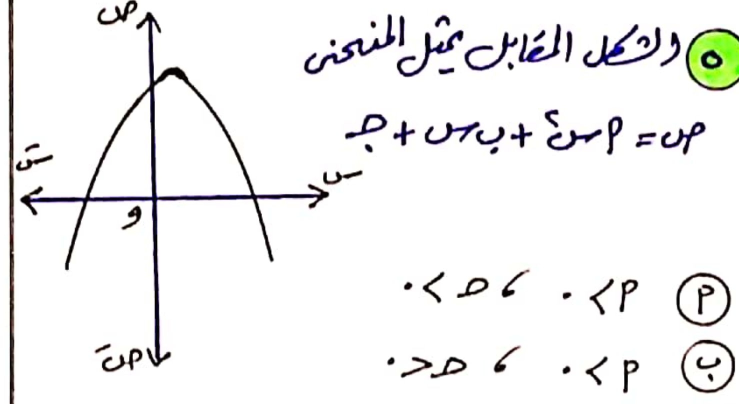
(أ) س = ٢ (ب) س = ١

(جـ) س = −٢ (د) س = $\frac{1}{2}$

بالتعويض نستطيع أو حل كل معادلة.

---

(٥) الشكل المقابل يمثل المنحنى ص = أ س² + ب س + جـ



(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠

(ب) أ > ٠ ، جـ < ٠

(جـ) أ < ٠ ، جـ > ٠

(د) أ < ٠ ، جـ < ٠

لأن المنحنى مفتوح لأسفل والجذران مختلفان في الإشارة فلابد أن يكون حاصل ضربهما سالب

لأنه في البسط

$\frac{جـ}{أ}$ سالب ∴ جـ > ٠

---

(٦) قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ م يراد مضاعفة هذه المساحة وذلك بزيادة كل من بعديها بنفس المسافة فإن المسافة ...

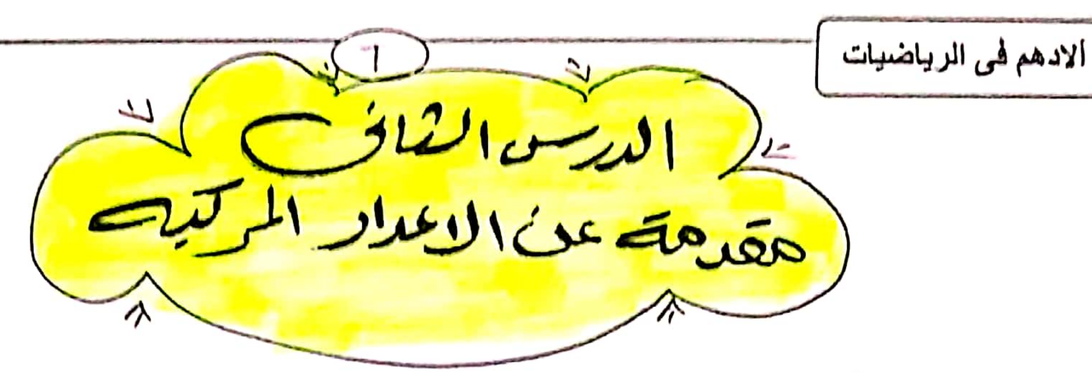
(أ) ٣ (ب) ٥

(جـ) ٧ (د) ٩

٦ × ٩ = ٥٤ بالمضاعفة يبقى ١٠٨

(٦ + س)(٩ + س) = ١٠٨

بوضع أو حل نستطيع س = ٣



هنتعلم أيه الدرس ده

١- يعني أيه عدد تخيلي
٢- ازاي أضع العدد التخيلي في أبسط صورة
٣- مجموعة الاعداد المركبة
٤- نعيش شوية مع الاعداد المركبة

هيا نبدأ — توكلنا على الله



هو العدد الذي مربعه = -١

$\therefore$ $ت^٢ = -١$

$ت = \sqrt{-١}$

وعلى ذلك

$\sqrt{-٢} = \sqrt{٢}\,ت$

$\sqrt{-٥} = \sqrt{٥}\,ت$

$\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}\,ت$

ملحوظة

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٦}$ وكلت أشبه

$\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} \neq \sqrt{-١ \times -١}$

$ت \times ت = ت^٢ = -١$

لذلك نعمم القاعدة

إذا كان أ ، ب عددان حقيقيان سالبان

فإن $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \neq \sqrt{أب}$

أمثلة

(١) $\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٥} = \sqrt{٣}\,ت \times \sqrt{٥}\,ت$

$= \sqrt{١٥}\,ت^٢ = -١ \times \sqrt{١٥} = -\sqrt{١٥}$

(٢) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٧} = \sqrt{٢}\,ت \times \sqrt{٧}\,ت$

$= \sqrt{١٤} \times ت^٢ = -\sqrt{١٤}$



$ت = ت$

$ت^٢ = -١$

$ت^٣ = -ت$

$ت^٤ = ١$

دي دورة تتكرر كل ٤

سؤال مهم ازاي اجيب ت في أبسط صورة

إذا كان الاس موجب هنطرح أول عدد تحته مباشرة يقبل القسمة على ٤

وإذا كان الأس سالب هجمع عليه أول عدد موجب يقبل القسمة على ٤ وتعالوا نحل وهنفهم إن شاء الله

مثال ١ أوجد في أبسط صورة

1. $ت^{8} = 1$ لأنه ٨ تقبل على ٤ بدون باقي
2. $ت^{-16} = 1$ لأنه -١٦ // // بدون باقي
3. $ت^{4ن} = 1$ لأنه ٤ن // // // //
4. $ت^{-4م} = 1$ لأنه -٤م تقبل // بدون //
5. $ت^{5} = ت^{5-4} = ت^{1} = ت$
6. $ت^{13} = ت^{13-12} = ت^{1} = ت$
7. $ت^{91} =$ ....
8. $ت^{18} = ت^{18-16} = ت^{2} = -1$
9. $ت^{22} = ت^{22-20} = ت^{2} = -1$
10. $ت^{34} =$ ....
11. $ت^{11} = ت^{11-8} = ت^{3} = -ت$
12. $ت^{15} = ت^{15-12} = ت^{3} = -ت$
13. $ت^{31} =$ ....
14. $ت^{4ن+1} = ت^{1} = ت$
15. $ت^{8ن+2} = ت^{2} = -1$
16. $ت^{20ن+7} = ت^{7} = ت^{7-4} = ت^{3} = -ت$

النوع ده كده اتفهم كويس؟

مثال ٢ أوجد في أبسط صورة

1. $ت^{-4} = 1$ لأنه -٤ تقبل على ٤ بدون باقي
2. $ت^{-8} = 1$ ---- // //
3. $ت^{-12ن} = 1$
4. $ت^{-3} = ت^{-3+4} = ت^{1} = ت$
5. $ت^{-5} = ت^{-5+8} = ت^{3} = -ت$
6. $ت^{-7} = ت^{-7+8} = ت^{1} = ت$
7. $ت^{-11} = ت^{-11+12} = ت^{1} = ت$
8. $ت^{-14} = ت^{-14+16} = ت^{2} = -1$
9. $ت^{-22} = ت^{-22+24} = ت^{2} = -1$
10. $ت^{4ن-9} = ت^{-9+12} = ت^{3} = -ت$
11. $ت^{100ن-15} = ت^{-15} = ت^{-15+16} = ت$

مجموعة الأعداد المركبة

العدد المركب $أ + ب ت$

الجزء الحقيقي (أ) — الجزء التخيلي (ب)

لاحظ أن

1. إذا كان $أ = 0$ يبقى العدد تخيلي
2. إذا كان $ب = 0$ يبقى العدد حقيقي

النهاردة بإذن الله هنضيف مجموعة جديدة للأعداد وهى مجموعة الأعداد المركبة

$ك = \{ أ + ب ت : أ ، ب \in ح ، ت^2 = -١ \}$

$\therefore ع \subset ط \subset ص \subset ن \subset ح \subset ك$



مثال ٣: أوجد فى ك م.ح لكل مما يلي

(١) $س^2 + ٢٥ = ٠$



الحل

$س^2 = -٢٥$

$س = \pm\sqrt{-٢٥} = \pm\sqrt{٢٥ ت^2}$

$= \pm ٥ت$

$\therefore م.ح = \{\pm ٥ت\}$



(٢) $٢س^2 + ١٨ = ٠$

الحل

$٢س^2 = -١٨$ ÷ ٢

$س^2 = -٩$ بأخذ $\sqrt{}$

$س^2 = \pm\sqrt{-٩} = \pm\sqrt{٩ ت^2}$

$= \pm ٣ت$

$\therefore م.ح = \{٣ت ، -٣ت\}$

سؤال رفيع

متى يتساوى العددان المركبان

ج: عندما يتساوى الجزء الحقيقي مع الحقيقي و يتساوى الجزء التخيلي مع التخيلي



مثال ٤: أوجد قيم س ، ص

(١) $س + ص ت = ٤ - ٣ت$

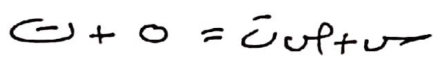
$س = ٤$ ، $ص = -٣$

(٢) $س - ٥ت = ٤ - ص ت$



$س = ٤$ ، $ص = ٥$

(٣) $س + ص ت = (٣ + ٢ت) + (٢ - ت)$



$س + ص ت = ٥ + ت$

$س = ٥$ ، $ص = ١$

أيه رأيكم ناخد تمرين شامل كل العمليات على الأعداد المركبة



مثال ٥: أوجد فى أبسط صورة يا حج

(١) $(٣ + ٥ت) + (٤ - ٢ت)$

$= ٧ + (٥ - ٢)ت$

$= ٧ + ٣ت$

٢) (٢ − ت) − (٥ + ت)

الحل

٢ − ت − ٥ − ت

= (٢ − ٥) + (−١ −١) ت

−٣ − ٢ت

---

٣) (٤ + ٢ت) (٣ − ٥ت)

الحل

١٢ − ٢٠ت + ٦ت − ١٠ت²

١٢ − ١٤ت − (١٠ × −١)

٢٢ − ١٤ت

---

٤) (٣ + ٢ت)²

الحل

(٣ + ٢ت) (٣ + ٢ت)

٩ + ٦ت + ٦ت + ٤ت²

٩ + ١٢ت + (٤ × −١)

٥ + ١٢ت

ويمكنك تحل مربع كامل

(أ ± ب)² = أ² ± ٢ أ ب + ب²

---

٥) (١ − ت)⁴

الحل

((١ − ت)²)²

(١ − ٢ت + ت²)²

(١ − ٢ت − ١)²

(−٢ت)² = ٤ت² = −٤

---

٦) ت(٥ − ٣ت)

الحل

٥ت − ٣ت² = ٥ت + ٣

= ٣ + ٥ت

---

٧) (٢ − ت) (٢ + ت)

الحل

فرق بين مربعين (أ − ب) (أ + ب)

= أ² − ب²

٤ − ت² = ٤ − (−١) = ٥

---

٨) (٣ − ت) (٣ + ت)

الحل

٩ − ت² = ٩ − (−١) = ١٠

إِنَّ ٱللَّهَ وَمَلَٰٓئِكَتَهُۥ يُصَلُّونَ عَلَى ٱلنَّبِيِّۚ يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ صَلُّواْ عَلَيۡهِ وَسَلِّمُواْ تَسۡلِيمًا

العددان المترافقان

لاستطاعة الأمن اشارة الجزء التخيلى

أ + ب ت ⟸ مرافقه ⟸ أ - ب ت

لاحظ

	العدد	المرافق
①	٥ + ٢ت	٥ - ٢ت
②	٤ - ت	٤ + ت
③	ت - ٢ ← أصلها - ٢ + ت	⟸ المرافق - ٢ - ت
④	٣ت + ٥ أصلها ٥ + ٣ت	⟸ المرافق ٥ - ٣ت
⑤	٢ت أصلها ٠ + ٢ت	⟸ المرافق - ٢ت
⑥	-٤ت	⟸ المرافق ٤ت
⑦	٥ أصلها ٥ + صفر ت	⟸ المرافق ٥
⑧	٧	⟸ المرافق ٧

ملحوظة

① مجموع العددين المترافقين (عدد حقيقى)
= ضعف الجزء الأول (الحقيقى)

② حاصل ضرب العددين المترافقين (عدد حقيقى)
= مربع الحقيقى - مربع التخيلى
متناسش ت² = -١

مثال ٦

العدد ٥ - ٤ت
اكتب مرافقه ثم أوجد
مجموع العدد ومرافقه وحاصل ضربهما

الحل

* العدد ٥ - ٤ت المرافق = ٥ + ٤ت
* ٥ - ٤ت + ٥ + ٤ت = ١٠
* (٥ - ٤ت)(٥ + ٤ت)
= ٢٥ - ١٦ت² = ٢٥ - ١٦ × (-١)
= ٢٥ + ١٦ = ٤١

مثال ٧

العدد ٣ - ٢ت
أوجد مرافقه
ثم أوجد مجموع وحاصل ضرب العدد ومرافقه

الحل

* العدد ٣ - ٢ت مرافقه = ٣ + ٢ت
* (٣ - ٢ت) + (٣ + ٢ت) = ٦
* (٣ - ٢ت)(٣ + ٢ت) = ٩ - ٤ت²
= ٩ - (٤ × -١) = ٩ + ٤ = ١٣

ملحوظة

لكتابة العدد المركب فى أبسط صورة
إذا كان له مقام نضرب
البسط والمقام فى مرافق المقام.

مثال ٨

اكتب كلاً من الأعداد التالية في أبسط صورة.

(١) $\frac{10}{2+\text{ت}}$

الحل

بالضرب × $(2-\text{ت})$ بسطاً ومقاماً

المقدار $= \frac{10}{2+\text{ت}} \times \frac{(2-\text{ت})}{(2-\text{ت})} = \frac{10(2-\text{ت})}{4-\text{ت}^2}$

$= \frac{10(2-\text{ت})}{4+1} = \frac{10(2-\text{ت})}{5} = 4-2\text{ت}$

(٢) $\frac{3+2\text{ت}}{2-5\text{ت}}$

الحل

بالضرب × $(2+5\text{ت})$ بسطاً ومقاماً

$= \frac{3+2\text{ت}}{2-5\text{ت}} \times \frac{2+5\text{ت}}{2+5\text{ت}}$

$= \frac{6+15\text{ت}+4\text{ت}+10\text{ت}^2}{4-25\text{ت}^2}$

$= \frac{6+19\text{ت}-10}{4+25} = \frac{-4+19\text{ت}}{29}$

$= \frac{-4}{29} + \frac{19}{29}\text{ت}$

مثال ٩

إذا كان $\frac{(2+\text{ت})(2-\text{ت})}{3+4\text{ت}} = \text{س} + \text{ت}\,\text{ص}$ فأوجد قيمة س، ص

$= \frac{4-\text{ت}^2}{3+4\text{ت}} = \frac{4+1}{3+4\text{ت}} = \frac{5}{3+4\text{ت}}$

بالضرب × $(3-4\text{ت})$ بسطاً ومقاماً

$= \frac{5}{3+4\text{ت}} \times \frac{3-4\text{ت}}{3-4\text{ت}}$

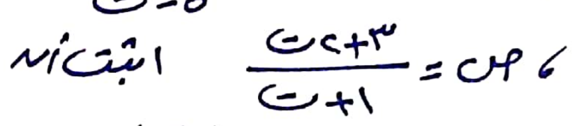
$= \frac{5(3-4\text{ت})}{9-16\text{ت}^2} = \frac{5(3-4\text{ت})}{9+16}$

$= \frac{5(3-4\text{ت})}{25} = \frac{1}{5}(3-4\text{ت})$

$= \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\text{ت}\right)$

∴ $\text{س} = \frac{3}{5}$ ، $\text{ص} = \frac{-4}{5}$

مثال ١٠



إذا كان $\text{س} = \frac{13}{5-\text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{3+2\text{ت}}{1+\text{ت}}$ أثبت أن س، ص مترافقان.

الحل

$\text{س} = \frac{13}{5-\text{ت}} \times \frac{5+\text{ت}}{5+\text{ت}} = \frac{13(5+\text{ت})}{25-\text{ت}^2}$

$= \frac{13(5+\text{ت})}{26} = \frac{5+\text{ت}}{2} = \left(\frac{5}{2}+\frac{\text{ت}}{2}\right)$

$\text{ص} = \frac{3+2\text{ت}}{1+\text{ت}} \times \frac{1-\text{ت}}{1-\text{ت}} = \frac{3-3\text{ت}+2\text{ت}-2\text{ت}^2}{1-\text{ت}^2}$

$= \frac{3-\text{ت}+2}{1+1} = \frac{5-\text{ت}}{2} = \left(\frac{5}{2}-\frac{\text{ت}}{2}\right)$

∴ س، ص عددان مترافقان لاختلاف إشارة الجزء التخيلي فيهما

اختر الاجابة

١) مرافق العدد $(٣ت - ٤)$ هو ....

(أ) $٣ت + ٤$ (ب) $-٣ت - ٤$ ✔

(جـ) $-٣ت + ٤$ (د) $٣ت - ٤$

تغيير اشارة التخيلى

٢) المعكوس الجمعى للعدد المركب $(٤ - ٧ت)$ هو ...

(أ) $٤ + ٧ت$ (ب) $-٤ + ٧ت$ ✔

(جـ) $-٤ - ٧ت$ (د) $٤ - ٧ت$

هنغير الاشارتين

٣) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} = ...$

(أ) ت (ب) $ت^{٢}$

(جـ) ١ (د) صفر ✔

$ت - ١ - ت + ١ = ٠$

٤) اذا كانت م ، ب ، جـ ، هـ اربعة اعداد صحيحة موجبة متتالية فإن

$ت^{م} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{هـ} = ...$

(أ) صفر ✔ (ب) -١

(جـ) ١ (د) ت

٥) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ... + ت^{١٠٠} = ...$

(أ) ت (ب) -١

(جـ) صفر ✔ (د) ١

كل ٤ اعداد متتالية = ٠

$٠ \times ٢٥ =$ صفر

٦) اذا كان $(٣ - ٥ت)^{١٠٠} (٣ + ٥ت)^{١٠٠} = س + ص ت$

فإن ص = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٥

(جـ) صفر ✔ (د) غير ذلك

الفكرة حاصل ضرب العددين المترافقين = عدد حقيقى

∴ الجزء التخيلى = صفر

٧) اذا كان $(٥ + ت)^{١٠} (٥ - ت)^{١٠} = س + ت ص$

فإن ص = ...

(أ) ١ (ب) -١

(جـ) ٥ (د) صفر ✔

٨) أى مما يلى يكون عدداً تخيلياً ....

(أ) $\sqrt{-٣}$ ✔ (ب) π

(جـ) -٤ (د) $ت^{٢}$

٩) اذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية $س^{٢} + ١ = ٠$ فإن $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨} = ...$

(أ) $-٢ت$ (ب) $٢ت$

(جـ) -٢ ✔ (د) ٢٠١٨

$س^{٢} = -١$ ، $س = \pm\sqrt{-١}$ ، $س = \pm ت$

$(ت)^{٢٠١٨} + (-ت)^{٢٠١٨} = -١ - ١ = -٢$

١٠) اصغر عدد صحيح موجب (ن) يجعل $\left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{ن} = ١$

(أ) ٢ (ب) ٤ ✔

(جـ) ٨ (د) ١٢

الواجب

١ ضع فى أبسط صورة

(١) $ت^{٨}$ (٢) $ت^{-١٢}$

(٣) $ت^{١١}$ (٤) $ت^{-٣}$

(٥) $ت^{٢٥}$ (٦) $ت^{-٩}$

(٧) $ت^{١٠٤}$ (٨) $ت^{-١٠}$

(٩) $ت^{٤ن+١}$ (١٠) $ت^{٨ن-١}$

(١١) $ت^{٤ن+٢}$ (١٢) $ت^{١٢ن-١٥}$

(١٣) $\frac{١}{ت^{-٢}}$ (١٤) $\frac{١}{ت^{٥}}$

٢ أوجد ناتج

(١) $(٤+ت) + (٥+٣ت)$

(٢) $(٢-ت) + (٢+ت)$

(٣) $(٤-٣ت) - (٥-٢ت)$

(٤) $(٢+٣ت)(٢-٣ت)$

(٥) $(١-ت)^{١٠}$

(٦) $(٢-٤ت)(٣+ت)$

٣ ضع على صورة أ + ب ت

(١) $\frac{٤+ت}{ت}$ (٢) $\frac{٣-ت}{٢-ت}$

(٣) $\frac{٤-٥ت}{٧ت}$ (٤) $\frac{٣+٤ت}{٥-٢ت}$

٤ حل المعادلات التالية فى مجموعة الأعداد المركبة

(١) $س^{٢}+٩=٠$

(٢) $س^{٢}+٢٥=٠$

(٣) $٤س^{٢}+١٠٠=٧٥$

(٤) $س^{٢}-٤س+٥=٠$

٥ أوجد قيمتى س، ص التى تحقق أن

(١) $س+٤ت = ٥-ص ت$

(٢) $(٢س+١) + ٤ص ت = ٥-١٢ت$

(٣) $(٢س-ص) + (س-٢ص) ت = ٥+ت$

(٤) $\frac{١٠}{٢+ت} = س + ص ت$

(٥) $\frac{٦-٤ت}{١-ت} = س + ت ص$

(٦) $\frac{(٣+ت)(٣-ت)}{٢+ت} = س + ص ت$

٦ إذا كان $س = \frac{١-٢ت}{١-٣ت}$ ، $ص = \frac{٢-ت}{٣-ت}$

فأثبت أن س، ص مترافقان

٨ اختر العدد ت ، -ت كل منهما

(أ) معكوس جمعى (ب) معكوس ضربى

(جـ) معكوس جمعى وضربى (د) غير ذلك

على فكرة كل منهما معكوس جمعى وضربى ومرافق الآخر

الدرس الثالث تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

فى المعادلة م $س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠

المميز	$ب^{٢}$-٤م جـ > ٠ المميز موجب	$ب^{٢}$-٤م جـ = ٠ المميز = صفر	$ب^{٢}$-٤م جـ < ٠ المميز سالب
نوع الجذرين	حقيقيان مختلفان	حقيقيان متساويان	مركبان مترافقان وغير حقيقيين
الرســـم			

مثال : حدد نوع جذرى المعادلة دون حلها	تدريب : حدد نوع جذرى المعادلة دون حلها
① $س^{٢}$ – ١٠ س + ١٠ = ٠ الحـــــــل م = ١ & ب = - ١٠ & جـ = ١٠ المميز $ب^{٢}$-٤م جـ = $(-١٠)^{٢}$ – ٤×١×١٠ = ٦٠ (يعنى موجب) ∴ الجذران حقيقيان مختلفان .	① $س^{٢}$ – ٣ س + ٥ = ٠ الحـــــــل م = & ب = & جـ = المميز $ب^{٢}$-٤م جـ =
② $س^{٢}$ – ٦ س + ٩ = ٠ الحـــــــل م = ١ & ب = - ٦ & جـ = ٩ المميز $ب^{٢}$-٤م جـ = $(-٦)^{٢}$ – ٤×١×٩ = ٠ ∴ الجذران حقيقيان متساويان .	① $س^{٢}$ + ١٠ س + ٢٥ = ٠ الحـــــــل م = & ب = & جـ = المميز $ب^{٢}$-٤م جـ =

③ $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$

الحـــــل

أ = ١ & ب = -٣ & جـ = ٥

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ$ =

$(-٣)^٢ - ٤ × ١ × ٥ = - ١١$ (يعنى سالب)

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين .

③ $س^٢ - ٣ س + ٤ = ٠$

الحـــــل

أ = & ب = & جـ =

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ$ =

④ (س - ١١) - س (س - ٦) = ٠

الحـــــل

هنفك الاقواس ونعدلها الاول تمام ؟

$س - ١١ - س^٢ + ٦ س = ٠$

$- س^٢ + ٧ س - ١١ = ٠$ كدة جاهزة

أ = - ١ & ب = ٧ & جـ = - ١١

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ$ =

$(٧)^٢ - ٤ × (- ١) × (- ١١) = ٥$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان .

④ $٦ س^٢ = ١٩ س - ١٥$

الحـــــل

هنعديهم فى طرف واحد ونخليها معادلة صفرية

$٦ س^٢ - ١٩ س + ١٥ = ٠$ كدة جاهزة

أ = & ب = & جـ =

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ$ =

أثبت أن جذرى المعادلة

① $٧ س^٢ - ١١ س + ٥ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم أوجد الجذرين بإستخدام القانون العام

الحـــــل

أ = ٧ & ب = - ١١ & جـ = ٥

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ$ =

$(-١١)^٢ - ٤ × ٧ × ٥ = - ١٩$ (كمية سالبة)

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين .

أثبت أن جذرى المعادلة

① $٢ س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم أوجد الجذرين بإستخدام القانون العام

الحـــــل

أ = & ب = & جـ =

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ$ =

لايجاد الجذرين باستخدام القانون العام

لايجاد الجذرين باستخدام القانون العام	
$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ} = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{١٤}$	$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ} =$
$\frac{١١ \pm \sqrt{١٩} ت}{١٤}$	
∴ الجذران هما $\frac{١١ + \sqrt{١٩} ت}{١٤}$ ، $\frac{١١ - \sqrt{١٩} ت}{١٤}$	∴ الجذران هما ،

سؤال بسيط أمتى الجذران يكونوا متساويان ؟ طبعاً لما المميز = صفر مظبوط ؟ تعالوا نشوف الفكرة دى كمان

مثال : أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان	تدريب: أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان
① $٣ س^٢ - ٦ س + ك = ٠$	① $٢ س^٢ + ك س + ٥ = ٠$
الحـــــل	**الحـــــل**
أ = ٣ & ب = - ٦ & جـ = ك	أ = & ب = & جـ =
∵ الجذران متساويان ∴ المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$	المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$
$(-٦)^٢ - ٤ \times ٣ \times ك = ٠$	
$٣٦ - ١٢ ك = ٠$	
$-١٢ ك = -٣٦ \Leftarrow ك = \frac{-٣٦}{-١٢} = ٣$	

مثال : أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان :

$س^٢ + ٢ (ك - ١) س + (٢ ك + ١) = ٠$ ثم أوجد الجذرين

الحـــــل

أ = ١ & ب = ٢ (ك - ١) & جـ = (٢ ك + ١) ∵ الجذران متساويان

∴ المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$ $[٢ (ك - ١)]^٢ - [٤ \times ١ \times (٢ ك + ١)] = ٠$

[٢ك - ٢)]٢ – [٤ (٢ ك + ١)] = ٤ ك٢ – ٨ ك + ٤ – ٨ ك - ٤ = ٠

٤ ك٢ – ١٦ ك = ٠ ⇐ ٤ ك (ك - ٤) = ٠

إما ك = ٠ وتكون المعادلة	و إما ك = ٤ وتكون المعادلة
س٢ – ٢ س + ١ = ٠	س٢ + ٦ س + ٩ = ٠
(س – ١) (س – ١) = ٠	(س + ٣) (س + ٣) = ٠
الجذران هما ١ ، ١	الجذران هما - ٣ ، - ٣

③ مثال: أوجد قيمة ك التى تجعل جذرى المعادلة

س٢ + ٤ س + ك = ٠ حقيقيان مختلفان

الحــــــل

م = ١ & ب = ٤ & جـ = ك

∵ الجذران حقيقيان مختلفان ∴ المميز > ٠

ب٢ - ٤م جـ > ٠ ⇐ (٤)٢ – ٤ × ١ × ك > ٠

١٦ – ٤ك > ٠ ⇐ – ٤ ك > – ١٦

ك < $\frac{-١٦}{-٤}$ ك < ٤ ∴ ك ∈] - ∞ ، ٤ [

③ تدريب: أوجد قيمة ك التى تجعل المعادلة

ك س٢ – ٨ س + ١٦ = ٠ ليس لها حل فى ح

يعنى الجذران مركبان وغير حقيقين

الحــــــل

م = & ب = & جـ =

المميز ب٢ - ٤م جـ < ٠

ملحوظة هامة إذا كانت المعاملات م ، ب ، جـ أعداد نسبية والمميز مربع كامل فإن الجذران حقيقيان نسبيان

مثال : إذا كان ل ، م عددين نسبيين فاثبت أن

جذرى المعادلة ل س٢ + (ل – م) س – م = ٠

عددان نسبيان الحــــــل

م = ل & ب = ل – م & جـ = – م

ب٢ - ٤م جـ = (ل – م)٢ – ٤ × ل × (- م)

= ل٢ – ٢ل م + م٢ + ٤ل م = ل٢ + ٢ل م + م٢

(ل + م)٢ ⇐ مربع كامل ∴ الجذران نسبيان

تدريب: إذا كان ل ، م عددين نسبيين فاثبت أن

جذرى المعادلة ل س٢ + م س + م – ل = ٠

عددان نسبيان الحــــــل

مثال / اختر

١) إذا كان أ س^2 + ب س + جـ = ٠ وكان المميز ب^2 - ٤ أ جـ > ٠ فإن الجذران

(أ) حقيقيان مختلفان (ب) مركبان وغير حقيقيان

(جـ) حقيقيان متساويان (د) غير ذلك

٢) إذا كان ب^2 - ٤ أ جـ = ٠ فإن الجذران

(أ) حقيقيان متساويان (ب) حقيقيان مختلفان

(جـ) مركبان غير حقيقيان (د) غير ذلك

٣) إذا كان ب^2 - ٤ أ جـ < ٠

(أ) مركبان مترافقان (ب) حقيقيان متساويان

(جـ) حقيقيان مختلفان (د) غير ذلك

٤) إذا كان المميز ب^2 - ٤ أ جـ غير سالب فإن الجذران

(أ) حقيقيان متساويان (ب) حقيقيان مختلفان

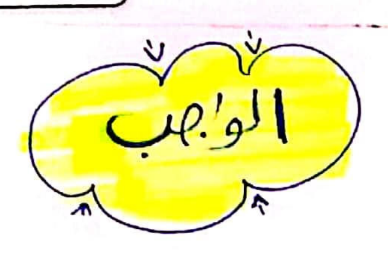
(جـ) حقيقيان (د) مركبان وغير حقيقيان

غير سالب يعني موجب أو صفر
حقيقيان مختلفان أو متساويان

٥) جذرا المعادلة س^2 - ٢√٥ س + ١ = ٠

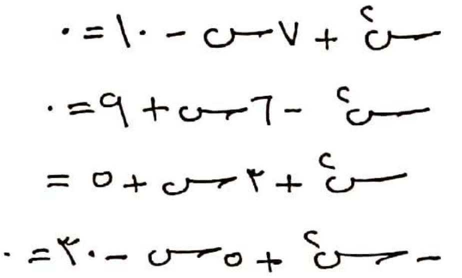
(أ) حقيقيان نسبيان (ب) غير حقيقيين

(جـ) حقيقيان متساويان (د) حقيقيان غير نسبيان

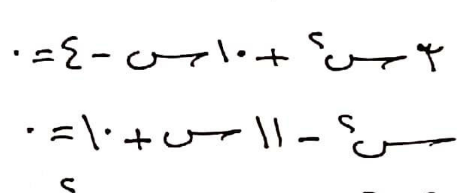




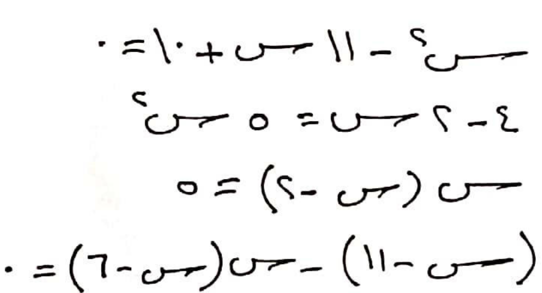
١) حدد نوع جذري كل من المعادلات التالية



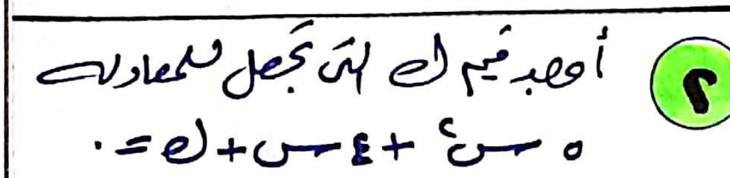
١. س^2 + ٧س - ١٠ = ٠
٢. س^2 - ٦س + ٩ = ٠
٣. س^2 + ٣س + ٥ =
٤. -س^2 + ٥س - ٣٠ = ٠
٥. ٣س^2 + ١٠س - ٤ = ٠



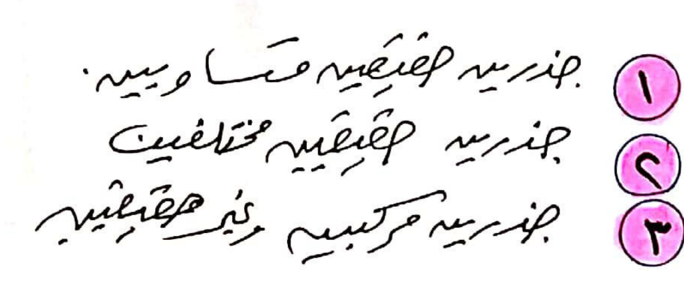
٦. س^2 - ١١س + ١٠ = ٠
٧. ٤ - ٢س = ٥س^2



٨. س(س - ٢) = ٥
٩. (س - ١١) - س(س - ٦) = ٠



٢) أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلة ٥س^2 + ٤س + ك = ٠



١. جذرين حقيقيين متساويين.
٢. جذرين حقيقيين مختلفين
٣. جذرين مركبين وغير حقيقيين



٣) اثبت أن جذري المعادلة ٧س^2 - ١١س + ٥ = ٠ مركبان وغير حقيقيين ثم باستخدام الآلة الحاسبة

الدرس الرابع
العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

$أ س^{2} + ب س + جـ = ٠$

(١) مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{2}} = \frac{-ب}{أ}$

(٢) حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{2}} = \frac{جـ}{أ}$

الفكرة الأولى
مباشرة

مثال ١: دون حل المعادلات التالية أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين.

---

(١) $س^{2} + ٥س + ٤ = ٠$

الحل

أ = ١ ب = ٥ جـ = ٤

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{١} = -٥$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{١} = ٤$

(٢) $٢س^{2} + ٥س - ١٢ = ٠$

الحل

أ = ٢ ب = ٥ جـ = −١٢

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

---

(٣) $٣س^{2} = ٢٣س - ٣٠$

الحل

هنضبط المعادلة

$٣س^{2} - ٢٣س + ٣٠ = ٠$

أ = ٣ ب = −٢٣ جـ = ٣٠

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٢٣}{٣}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٣٠}{٣} = ١٠$



مثال: إذا كان مجموع جذري المعادلة $٢س^{2} + ب س - ٥ = ٠$ هو $\frac{-٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة

الحل

أ = ٢ ب = ب جـ = −٥

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-٣}{٢} = \frac{-ب}{أ} = \frac{-ب}{٢}$

∴ −ب = −٣

∴ **ب = ٣**

∴ المعادلة هي $٢س^٢ + ٣س - ٥ = ٠$

$أ = ٢$ $\quad ب = ٣$ $\quad جـ = -٥$

∴ نستخدم القانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$$= \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٤٠}}{٤} = \frac{-٣ \pm ٧}{٤}$$

$$\left\{\frac{-٣ + ٧}{٤} ، \frac{-٣ - ٧}{٤}\right\} = \left\{١ ، \frac{-٥}{٢}\right\}$$

كان من الممكن ان نحلها بالمقص
أو بالطريقة اللى بنتغلب بيها على المقص
هشرحهالك علشان تفهمها بس للخطوات

$٢س^٢ + ٣س - ٥ = ٠$

$س^٢ + ٣س - ١٠ = ٠$

$(س - \frac{٢}{٢})(س + \frac{٥}{٢}) = ٠$

$س = ١$ أو $س = \frac{-٥}{٢}$

مثال ٣ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٢س^٢ - ٤س + ك = ٠$ هو $\frac{٩}{٢}$ أوجد قيمة ك ثم حل هذه المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة

الحل

∴ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{٩}{٢} = \frac{ك}{٢}$

∴ $ك = ٩$

∴ المعادلة هى $٢س^٢ - ٤س + ٩ = ٠$

$أ = ٢$ $\quad ب = -٤$ $\quad جـ = ٩$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤ \times ٢ \times ٩}}{٢ \times ٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٥٦}}{٤}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{٥٦}\,ت}{٤} = \left\{١ + \frac{\sqrt{١٤}}{٢}ت ، ١ - \frac{\sqrt{١٤}}{٢}ت\right\}$$

مثال ٤ إذا كان $س = -١$ أحد جذرى المعادلة $س^٢ - ٢س + أ = ٠$ فاوجد قيمة أ والجذر الآخر.

الحل

بالتعويض عن $س = -١$

$(-١)^٢ - ٢(-١) + أ = ٠$

$١ + ٢ + أ = ٠$ $\quad$ ∴ $أ + ٣ = ٠$

∴ $أ = -٣$

∴ المعادلة $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

$(س + ١)(س - ٣) = ٠$

$س = -١$ $\quad س = ٣$

∴ الجذر الآخر $= ٣$

مثال ٥ إذا كان ٢ ، ٥ جذرى المعادلة $س^٢ + أس + ب = ٠$ فاوجد قيمة أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين $= ٧$ $\quad$ ∴ $\frac{-أ}{١} = ٧$

∴ $-أ = ٧$ $\quad$ ∴ $أ = -٧$

، ∴ حاصل ضرب الجذرين = جـ/أ = ب = ١٠

∴ **ب = ١٠**

مثال ٦ إذا كان $\sqrt{3}$ت ، $-\sqrt{3}$ت جذرى المعادلة س² + أس + ب = ٠ فأوجد قيمتى أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين = $\sqrt{3}$ت + ($-\sqrt{3}$ت) = صفر

حاصل ضرب الجذرين = $\sqrt{3}$ت × $-\sqrt{3}$ت = −٣ت²

= −٣ × (−١) = ٣

∴ −أ/١ = صفر ∴ أ = صفر

ب/١ = ٣ ∴ ب = ٣



سؤال بسيط

* متى يكون مجموع عددين = صفر

جـ / إذا كان كل منهما معكوس جمعى للآخر.
فى المعادلة معناها أن معامل س = صفر

* ومتى يكون حاصل ضرب عددين = ١

جـ / إذا كان كل منهما معكوس ضربى للآخر.
فى المعادلة معناها أن الحد المطلق = معامل س²
جـ = أ



أوجد قيمة ل إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعى للآخر

أ) س² + (ل − ٥) س + ٣ = ٠

ل − ٥ = ٠ ∴ ل = ٥

ب) س² + (٤ + ل) س − ٢ = ٠

٤ + ل = ٠ ∴ ل = −٤

جـ) س² + ل س − ١ = ٠

ل = ٠

مثال ٨ أوجد قيمة ل التى تجعل أحد الجذرين معكوس ضربى للآخر.

أ) ٢س² − ٥س + ل = ٠

ل = ٢

ب) ٤ل س² + ٧س + ل² + ٤ = ٠

ل² + ٤ = ٤ل

ل² − ٤ل + ٤ = ٠ ⟸ (ل − ٢)² = ٠

∴ ل − ٢ = ٠ ∴ ل = ٢

جـ) (ل − ٤) س² − ٥س − ٣ = ٠

ل − ٤ = −٣

ل = −٣ + ٤ = ١

∴ ل = ١

اختر

١) إذا كان أحد جذري المعادلة ٢س² - ب س + ٧ = ٠ معكوساً جمعياً للآخر فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) -٢
(ج) ٧/٢ (د) صفر

---

٢) إذا كان أحد جذري المعادلة أ س² - ٣ س + ٢ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ = ...

(أ) ١/٣ (ب) ١/٢
(ج) ٢ (د) ٣

---

٣) إذا كان س² + (ك - ٥) س - ٤ = ٠ أحد جذريها معكوساً جمعياً للآخر فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) -٥
(ج) ٥ (د) -٤

---

٤) لإيجاد قيم ب ، جـ الحقيقية في المعادلة س² + ب س + جـ = ٠ يكون كافياً الحصول على ....

(أ) مجموع الجذرين = ٦ فقط (ب) أحد الجذرين (٣ + ت) فقط
(ج) (أ) ، (ب) معاً (د) ولا حاجة من اللي فات

ليه ← إذا كان أحد الجذرين مركب فإن الآخر هو المرافق له وكده هنجيب مجموعهم وحاصل ضربهم وكل حاجة.

---

٥) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د(س) = أ س² + ب س + جـ

فإن (ب + جـ)/أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥
(ج) ٧ (د) ١٠

من الشكل الجذران هما ٥ ، ٢ مجموعهما ٧ وحاصل ضربهما ١٠

-ب/أ = ٧ ∴ ب/أ = -٧ ، جـ/أ = ١٠

(ب + جـ)/أ = ب/أ + جـ/أ = -٧ + ١٠ = ٣ (أبو أدهم)

---

٦) حاصل ضرب جذور المعادلات

أ س² + ب س + جـ = ٠

ب س² + جـ س + أ = ٠

جـ س² + أ س + ب = ٠ يساوي

(أ) أ ب جـ (ب) -١ (ج) ١ (د) صفر

جـ/أ × أ/ب × ب/جـ = ١

---

٧) في المعادلة أ س² + ب س + جـ = ٠

إذا كان مجموع جذريها = حاصل ضربهما فإن ب = ...

(أ) أ (ب) -أ (ج) جـ (د) -جـ

-ب/أ = جـ/أ ∴ -ب = جـ

∴ ب = -جـ



إذا كان أحد جذري المعادلة هو عدد مركب فإن الجذر الآخر يكون مرافقه

مثال ٩ إذا كان $(١+\sqrt{٢}\,ت)$ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٢س + جـ = ٠$ فأوجد قيمة

١) الجذر الآخر
٢) قيمة جـ

الحل

١) ∵ الجذر الأول $(١+\sqrt{٢}\,ت)$
∴ الجذر الآخر $= (١-\sqrt{٢}\,ت)$

٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{١} = جـ$

$(١+\sqrt{٢}\,ت)(١-\sqrt{٢}\,ت) = ١ - ٢ت^٢ = ١ - ٢(-١) = ١+٢ = ٣$

∴ جـ = ٣



١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين.


١) $س^٢ - ٥س + ٧ = ٠$

٢) $٢س^٢ - ٣س + ١٤ = ٠$

٣) $٥س^٢ = ٢٠س - ٧$

٤) $(٣س - ٢)(س + ١) = ٠$

٢ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $٣س^٢ + ١٠س - جـ = ٠$ هو $\frac{-٨}{٣}$ فأوجد قيمة جـ ثم حل في الأعداد المركبة.

٣ أوجد قيمة أ إذا كان وأوجد الجذر الآخر

١) س = ٣ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٥س + أ = ٠$

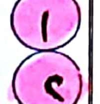
٢) $(١+ت)$ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٢س + أ = ٠$

٤ أوجد قيمة ك إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

١) $س^٢ - (ك-٣)س + ٧ = ٠$

٢) $٣س^٢ + (ك^٢-١)س + ٤ = ٠$


٥ أوجد قيمة ك إذا كان الجذران معكوسا ضربيا


١) $٣س^٢ - ٥س + ك = ٠$


٢) $٢س^٢ - ٤س + (ك-٣) = ٠$

٣) $(ك+١)س^٢ - ٣س + (٢ك-٣) = ٠$





الدرس الخامس
تكوين المعادلة إذا علم جذراها

إذا كان ل ، م هما جذري المعادلة

∴ مجموع الجذرين = ل + م

حاصل ضرب الجذرين = ل م

و المعادلة هي

س² − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

الفكرة الأولى
مباشرة

مثال ١ كون المعادلات التي جذراها .

(١) ٢ ، ٣

الحل

مجموع الجذرين = ٢ + ٣ = ٥

حاصل ضرب // = ٢ × ٣ = ٦

∴ المعادلة هي س² − ٥س + ٦ = ٠

---

(٢) ٢ ، −٥

الحل

مجموع الجذرين = ٢ + (−٥) = −٣

حاصل ضرب // = ٢ × −٥ = −١٠

∴ المعادلة س² + ٣س − ١٠ = ٠

---

(٣) ٥ + √٢ ، ٥ − √٢

الحل

مجموع الجذرين = ٥ + √٢ + ٥ − √٢ = ١٠

حاصل ضرب الجذرين = (٥ + √٢) (٥ − √٢)

= ٢٥ − ٢ = ٢٣

∴ المعادلة هي س² − ١٠س + ٢٣ = ٠

---

(٤) ٣ + ت ، ٣ − ت

الحل

مجموع الجذرين = ٣ + ت + ٣ − ت = ٦

حاصل ضربهما = (٣ + ت)(٣ − ت) = ٩ − ت²

= ٩ − (−١) = ٩ + ١ = ١٠

∴ المعادلة هي س² − ٦س + ١٠ = ٠

الفكرة الثانية
تكوين معادلة من معادلة أخرى معلومة

الخطوات

(١) من المعادلة المعلومة هنجيب ل+م ، ل م

(٢) والجديد نعوض بيهم في جذور المعادلة المطلوب

(٣) ومتبكده تكون المعادلة بدلالة الجذور الجديدة

وانتوا عاملين أيه ؟

مثال ٢ إذا علمت أن ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٥س - ٦ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها ل+٢ ، م+٢

الحل

* من المعادلة المعلومة

ل + م = ٥ ، ل م = -٦

* من المعادلة المطلوبة

● مجموع الجذرين = ل+٢+م+٢ = ل+م+٤

= ٥ + ٤ = ٩

● حاصل ضرب الجذرين = (ل+٢)(م+٢)

= ل م + ٢ل + ٢م + ٤

= ل م + ٢(ل+م) + ٤

= -٦ + (٢×٥) + ٤ = ٨

* ∴ المعادلة المطلوبة هي

$س^{٢}$ - ٩س + ٨ = ٠

مثال ٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٥س + ٣ = ٠ . فأوجد المعادلة التي جذورها ٢ل ، ٢م

الحل

* من المعادلة المعلومة

ل + م = ٥ ، ل م = ٣

* المعادلة المطلوبة

● مجموع الجذرين = ٢ل + ٢م = ٢(ل+م)

= ٢ × ٥ = ١٠

● وحاصل ضرب الجذرين = ٢ل × ٢م = ٤ ل م

= ٤ × ٣ = ١٢

* المعادلة هي $س^{٢}$ - ١٠س + ١٢ = ٠

مثال ٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٣س + ١ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها ل+م ، ل م

الحل

* من المعادلة المعلومة

ل + م = ٣ ، ل م = ١

لاحظ جيداً

أن الجذور المطلوبة هي ل+م ، ل م

∴ جذور المعادلة المطلوبة = ٣ ، ١

● مجموع الجذرين = ٣ + ١ = ٤

● حاصل ضرب الجذرين = ٣ × ١ = ٣

∴ المعادلة هي $س^{٢}$ - ٤س + ٣ = ٠

مثال ٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٧س + ٤ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها ل+١ ، م+١

الحل

حل انت يا شاطر

الفكرة الثالثة
مسائل اللف والدوران

احفظ شوية التطابقات دي علشان هتحتاجهم كتير.

① $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

② $ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} - ٣ ل م]$

③ $ل^{٣} - م^{٣} = (ل - م) [(ل + م)^{٢} - ل م]$

④ $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{م + ل}{ل م} = \frac{ل + م}{ل م}$

⑤ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م} = \frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل م}$

مثال ٦ إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$ فكون المعادلة التي جذراها $ل^{٢}$، $م^{٢}$

الحل

* من المعادلة المعلومة

$ل + م = -٣$ ، $ل م = -٥$

* المعادلة المطلوبة

● مجموع الجذرين $= ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

$= (-٣)^{٢} - ٢ \times (-٥)$

$= ٩ + ١٠ = ١٩$

● حاصل ضرب الجذرين $= ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢}$

$= (-٥)^{٢} = ٢٥$

* ∴ المعادلة هي $س^{٢} - ١٩س + ٢٥ = ٠$

مثال ٧ إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$ فكون المعادلة التي جذراها $ل^{٢}$، $م^{٢}$

الحل

* من المعادلة المعلومة

$ل + م = ٥$ $ل م = ١$

* المعادلة المطلوبة $ل^{٢}$، $م^{٢}$

● مجموع الجذرين $= ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

$= (٥)^{٢} - ٢ \times ١ = ٢٥ - ٢ = ٢٣$

● حاصل ضرب الجذرين $= ل^{٢} \times م^{٢} = (ل م)^{٢}$

$= (١)^{٢} = ١$

∴ المعادلة هي $س^{٢} - ٢٣س + ١ = ٠$

مثال ٨ كون المعادلة التربيعية التي كل من جذريها = مربع نظيره من جذري المعادلة $س^{٢} + ٣س + ٥ = ٠$

الحل

المعلوم $ل + م = -٣$ ، $ل م = ٥$

المطلوب $ل^{٢}$، $م^{٢}$ [مربع نظيره]

مجموع الجذرين $= ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م = -١$

حاصل ضرب الجذرين $= ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢} = ٢٥$

∴ المعادلة هي $س^{٢} + س + ٢٥ = ٠$

ملاحظات لحل المسائل اللفظية

إذا كان الجذران ل ، م
فتكون المعادلة التي جذراها

1. مربع نظيره: $ل^{2}$ ، $م^{2}$
2. مكعب نظيره: $ل^{3}$ ، $م^{3}$
3. ضعف نظيره: ٢ل ، ٢م
4. نصف نظيره: $\frac{ل}{2}$ ، $\frac{م}{2}$
5. يزيد عن نظيره بمقدار ١: ل+١ ، م+١
6. ينقص عن نظيره بمقدار ٢: ل-٢ ، م-٢
7. ثلاثة أمثال نظيره: ٣ل ، ٣م

مثال ٩: كون المعادلة التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذري المعادلة $س^{2} - 7س - 9 = 0$

الحل

نفرض أن جذري المعادلة المعلومة هي ل ، م

∴ ل+م = ٧ ، ل م = -٩

∴ جذور المعادلة المطلوبة هي ل+١ ، م+١

- مجموع الجذرين = ل+١+م+١ = ل+م+٢
  = (ل+م) + ٢ = ٧ + ٢ = ٩
- حاصل ضرب الجذرين = (ل+١) × (م+١)
  = ل م + ل + م + ١
  = (ل م) + (ل+م) + ١
  = -٩ + ٧ + ١ = -٩ + ٨ = -١

∴ المعادلة هي $س^{2} - 9س - 1 = 0$

مثال ١٠: إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $س^{2} - 3س + 2 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها $ل^{3}$ ، $م^{3}$

الحل

* من المعادلة المعطاة: ل+م = ٣ ، ل م = ٢
* المعادلة المراد تكوينها: $ل^{3}$ ، $م^{3}$

- مجموع الجذرين = $ل^{3} + م^{3}$
  = (ل+م)[$(ل+م)^{2}$ - (٣ل م)]
  = ٣ [٩ - ٣×٢] = ٣ [٩ - ٦]
  = ٣ × ٣ = ٩
- حاصل ضرب الجذرين = $ل^{3} م^{3} = (ل م)^{3}$
  = $(2)^{3}$ = ٨

* ∴ المعادلة هي $س^{2} - 9س + 8 = 0$

مثال ١١: إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $2س^{2} - 3س - 1 = 0$ فكون المعادلة التي جذراها

1. $\frac{1}{ل}$ ، $\frac{1}{م}$
2. $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$
3. ل+م ، ل م

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

جذور المعادلة المعطاة ل ، م

$ل + م = \frac{٣}{٢}$ ، $ل م = \frac{-١}{٢}$

(١) $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

مجموع الجذرين $= \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٣}{٢} \div \frac{-١}{٢}$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{-٢}{١} = -٣$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م}$

$= ١ \div (\frac{-١}{٢}) = -٢$

∴ المعادلة هي $س^٢ + ٣س - ٢ = ٠$

(٢) $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

مجموع الجذرين $= \frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^٢ + م^٢}{ل م}$

$= \frac{(ل + م)^٢ - ٢ ل م}{ل م} = \frac{(\frac{٣}{٢})^٢ - ٢ \times (\frac{-١}{٢})}{(\frac{-١}{٢})}$

$= \frac{-١٣}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل} = ١$

∴ المعادلة هي $س^٢ + \frac{١٣}{٢} س + ١ = ٠$

بالضرب × ٢

$٢س^٢ + ١٣س + ٢ = ٠$

(٣) $(ل + م)$ ، $(ل م)$

يعني $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$

مجموع الجذرين $= \frac{٣}{٢} + (\frac{-١}{٢}) = ١$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٢} = \frac{-٣}{٤}$

∴ المعادلة $س^٢ - س - \frac{٣}{٤} = ٠$ × ٤

$٤س^٢ - ٤س - ٣ = ٠$

مثال ١٢: إذا كان ل+١ ، م+١ هما جذرا المعادلة $س^٢ + ٥س + ٢ = ٠$ فأوجد المعادلة التى جذراها ل ، م

الحل

المعادلة المعطاة $(ل + ١)$ ، $(م + ١)$

مجموع الجذرين $= ل + ١ + م + ١ = ل + م + ٢$

∴ $ل + م + ٢ = -٥$ ∴ $ل + م = -٧$

حاصل ضرب $= (ل + ١)(م + ١)$

$= ل م + ل + م + ١ = ل م - ٧ + ١ = ٢$

$ل م - ٦ = ٢$ $ل م = ٨$

المعادلة المطلوب جذراها ل ، م

مجموع $= ل + م = -٧$

وحاصل ضرب $= ل م = ٨$

∴ المعادلة هى $س^٢ + ٧س + ٨ = ٠$

ان لم تتألم لن تتعلم

اختر

١ المعادلة التربيعية التي مجموع جذريها −١ وحاصل ضربهما −٣ هي ....

(أ) س² − س − ٣ = ٠ (ب) س² + س + ٣ = ٠
(جـ) س² − س + ٣ = ٠ (د) س² + س − ٣ = ٠

٢ المعادلة التربيعية التي جذراها ٣ ، −٥ هي ...

(أ) س² + ٢س − ١٥ = ٠ (ب) س² − ٢س − ١٥ = ٠
(جـ) س² − ٢س + ١٥ = ٠ (د) س² + ٢س + ١٥ = ٠

٣ إذا كان ل ، ل² هما جذرا المعادلة
٢س² + ب س + ٥٤ = ٠ فإن ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −٢٤ (جـ) ٢٧ (د) ٣٦

حاصل ضربهما ل³ = ٥٤ ÷ ٢ = ٢٧ ل = ٣
مجموعهما ٣ + ٩ = ١٢ −ب ÷ ٢ = ١٢ ∴ ب = −٢٤

٤ إذا كان م ، ٢÷م هما جذرا المعادلة
م س² + ب س + ١٢ = ٠ فإن م = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٩

حاصل ضربهما م × ٢÷م = ٢ ١٢÷م = ٢ م = ٦

٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة
س² − ٥س + ٦ = ٠ فإن
ل² − ٥ل = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) −٦

∵ ل جذر للمعادلة ∴ بوضع ل بدلاً من س
ل² − ٥ل + ٦ = ٠ ، ∴ ل² − ٥ل = −٦

٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة
س² − ٩س + ١ = ٠ فإن ل² − ٩ل + ٥ = ...

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٩

بوضع ل بدلاً من س ∴ ل² − ٩ل + ١ = ٠
∴ ل² − ٩ل = −١ المقدار المطلوب ل² − ٩ل + ٥
= −١ + ٥ = ٤

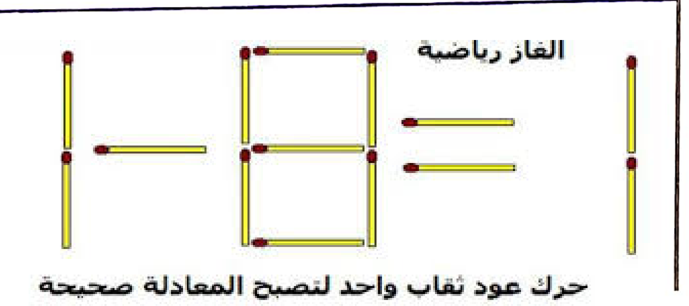
٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة
س² − (ظا θ) س − ١ = ٠ وكان ل² + م² = ٣
حيث ٠ < θ < ٩٠° فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(ل + م)² − ٢ل م = ٣ (ل + م)² + ٢ = ٣
(ل + م)² = ١ ل + م = ±١ السالب مرفوض لأن θ حادة
ظا θ = ١ ∴ θ = ٤٥°

٨ لتكوين المعادلة التربيعية التي جذراها
ل ، م حيث ل ، م أعداد حقيقية يكون كافياً
الحصول على

(أ) ل + م = ٥ فقط
(ب) (ل + م + ٤)² + (ل م − ٣)² = ٠ فقط
(جـ) أ ، ب معاً
(د) ولا واحد ضاهم





١ كوّن المعادلة التى جذراها

١) ١ ، ٣
٢) -٥ ، ٤
٣) ٢ ، -٧
٤) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$
٥) ١-٣ت ، ١+٣ت
٦) ١+$\sqrt{٢}$ ، ١-$\sqrt{٢}$
٧) -٥ت ، ٥ت

٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^٢ - ٧س + ١٢ = ٠ . كوّن المعادلة التى جذراها

١) ل+١ ، م+١
٢) ل-٢ ، م-٢
٣) ٢ل ، ٢م
٤) ل^٢ ، م^٢
٥) ل^٣ ، م^٣
٦) $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

٣ من المعادلة س^٢ - ٧س - ٩ = ٠ . كوّن المعادلة التى جذراها .

١) ضعف نظيرها من المعادلة المعطاة
٢) يزيد عن نظيره بمقدار ١
٣) ينقص عن نظيره بمقدار ٣
٤) مربع نظيره
٥) مكعب نظيره
٦) المعكوس الجمعى لنظيره
٧) المعكوس الضربى لنظيره

٤ إذا كان ل ، م جذرى المعادلة س^٢ - ٧س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التى جذراها

١) ٢ل ، ٢م
٢) ل+٢ ، م+٢
٣) $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$
٤) ل+م ، ل م
٥) ل^٢ ، م^٢

موظف مصري بيسال موظف امريكي
انت مرتبك كام
قاله ٧٠٠ دولار اساسي و٨٠٠ بدل سفر
و٤٠٠ دولا بدل خطر و٦٠٠ بدل غربة
فسأله الامريكي وانت
قاله ٦٠٠ جنيه
قاله الامريكاني دول بدل ايه
قاله : بدل ما اشحت

= 30
= 18
= 2
= ??

الدرس السادس
بحث اشارة الدالة

أولاً الدالة الثابتة

د: د(س) = جـ ، جـ ∈ ح* هى نفس إشارة جـ

يعنى اذا كان الثابت موجب تكون موجبة.
وإذا كان سالب تكون سالبة.

مثال ١ عين اشارة الدوال الثابتة

١) د(س) = ٥ ← موجبة دائماً
٢) د(س) = -٢ ← سالبة دائماً
٣) د(س) = $\frac{١}{٤}$ ← موجبة دائماً
٤) د(س) = -$\sqrt{٣}$ ← سالبة دائماً

ثانياً الدالة الخطية

هنحل المعادلة وتحدد قيمة س
وعلى اليمين مثل والشمال عكس

مثال عين اشارة كلاً مما يلى

١) د(س) = ٣س + ٦

الحل

بوضع ٣س + ٦ = ٠ ٣س = -٦
س = $\frac{-٦}{٣}$ = -٢

(خط الأعداد: -∞ ... −−− صفر عند -٢ (عكس اشارة س) +++++ (مثل اشارة س) ... ∞ ؛ اشارة د(س))

الدالة تكون
* موجبة عندما س > -٢ أو]-٢ ، ∞[
* سالبة عندما س < -٢ أو]-∞ ، -٢[
* د(س) = صفر عندما س = -٢

---

٢) د(س) = -٢س + ٨

الحل

بوضع -٢س + ٨ = ٠ -٢س = -٨
س = $\frac{-٨}{-٢}$ = ٤

(خط الأعداد: -∞ ... +++ (عكس) صفر عند ٤ −−−−− (مثل) ... ∞ ؛ اشارة د(س))

الدالة موجبة س < ٤ أو]-∞ ، ٤[
سالبة س > ٤ أو]٤ ، ∞[
د(س) = صفر عندما س = ٤

③ د(س) = ٢س − ٣

الحل

بوضع ٢س − ٣ = ٠ ، ٢س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

س: −∞ ... $\frac{٣}{٢}$ ... ∞

اشارة د(س): − − − − (عكس) صفر + + + + + + (مثل)

موجبة عندما س ∈] $\frac{٣}{٢}$ ، ∞ [

سالبة عندما س ∈] −∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [

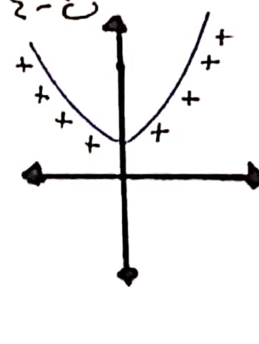
صفر عندما س ∈ { $\frac{٣}{٢}$ }

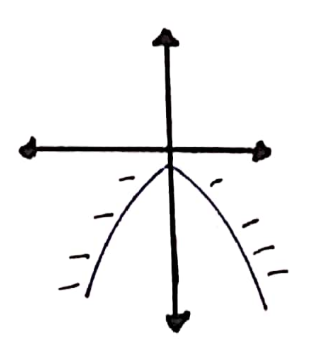


هنشوف المميز

الحالة الأولى المميز سالب

ب² − ٤ أ جـ < ٠





موجب دائماً   سالب دائماً

حسب اشارة معامل س²

مثال ٣ عين اشارة كلاً من الدوال التالية

① د(س) = س² + ٢س + ٥

الحل

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٥

ب² − ٤ أ جـ = (٢)² − ٤(١ × ٥) = ٤ − ٢٠

= −١٦ المميز سالب

∴ إشارة الدالة موجبة [مثل معامل س²] لجميع قيم س ∈ ح

② د(س) = −س² + ٢س − ٦

الحل

أ = −١ ، ب = ٢ ، جـ = −٦

ب² − ٤ أ جـ = (٢)² − ٤ × (−١)(−٦)

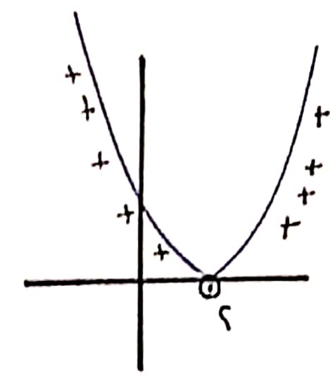
= ٤ − ٢٤ = −٢٠ "سالب"

∴ اشارة د(س) سالبة لجميع قيم س ∈ ح

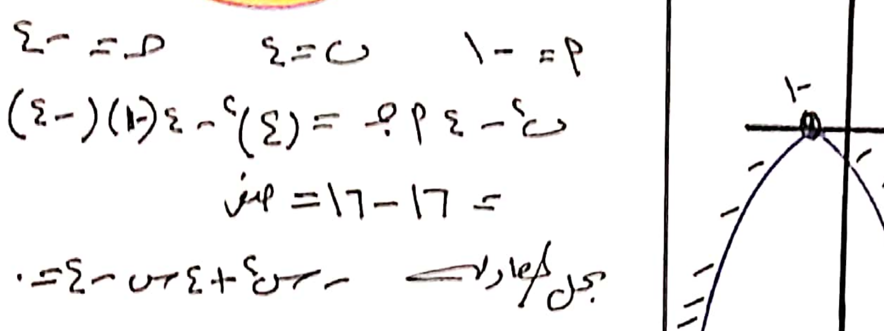


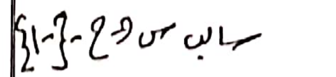


الحالة الثانية : المميز = صفر



موجبة س ∈ ح - {٢}





سالبة س ∈ ح - {-١}

مثال ٤ : ابحث اشارة كلاً من الدوال التالية

١) د(س) = س² - ٦س + ٩



أ = ١ ، ب = -٦ ، ج = ٩

ب² - ٤أج = (-٦)² - ٤ × ١ × ٩

= ٣٦ - ٣٦ = صفر

∴ بحل المعادلة س² - ٦س + ٩ = ٠

(س - ٣)(س - ٣) = ٠

∴ س = ٣

-∞ ← مثل ٣ مثل → ∞ (س)

+ + + + ٠ + + + + (اشارة د(س))

الدالة موجبة فى ح - {٣}

د(س) = صفر عندما س ∈ {٣}

٢) د(س) = -س² + ٤س - ٤

الحل

أ = -١ ، ب = ٤ ، ج = -٤

ب² - ٤أج = (٤)² - ٤(-١)(-٤)

= ١٦ - ١٦ = صفر

بحل المعادلة -س² + ٤س - ٤ = ٠

س² - ٤س + ٤ = ٠

(س - ٢)(س - ٢) = ٠

∴ س = ٢

-∞ ← مثل ٢ مثل → ∞

- - - - صفر - - - - -

الدالة سالبة عندما س ∈ ح - {٢}

د(س) = صفر عندما س = ٢

---

٣) د(س) = (٢س - ٣)²

الحل

بوضع (٢س - ٣)² = ٠

∴ ٢س - ٣ = ٠ ، ٢س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

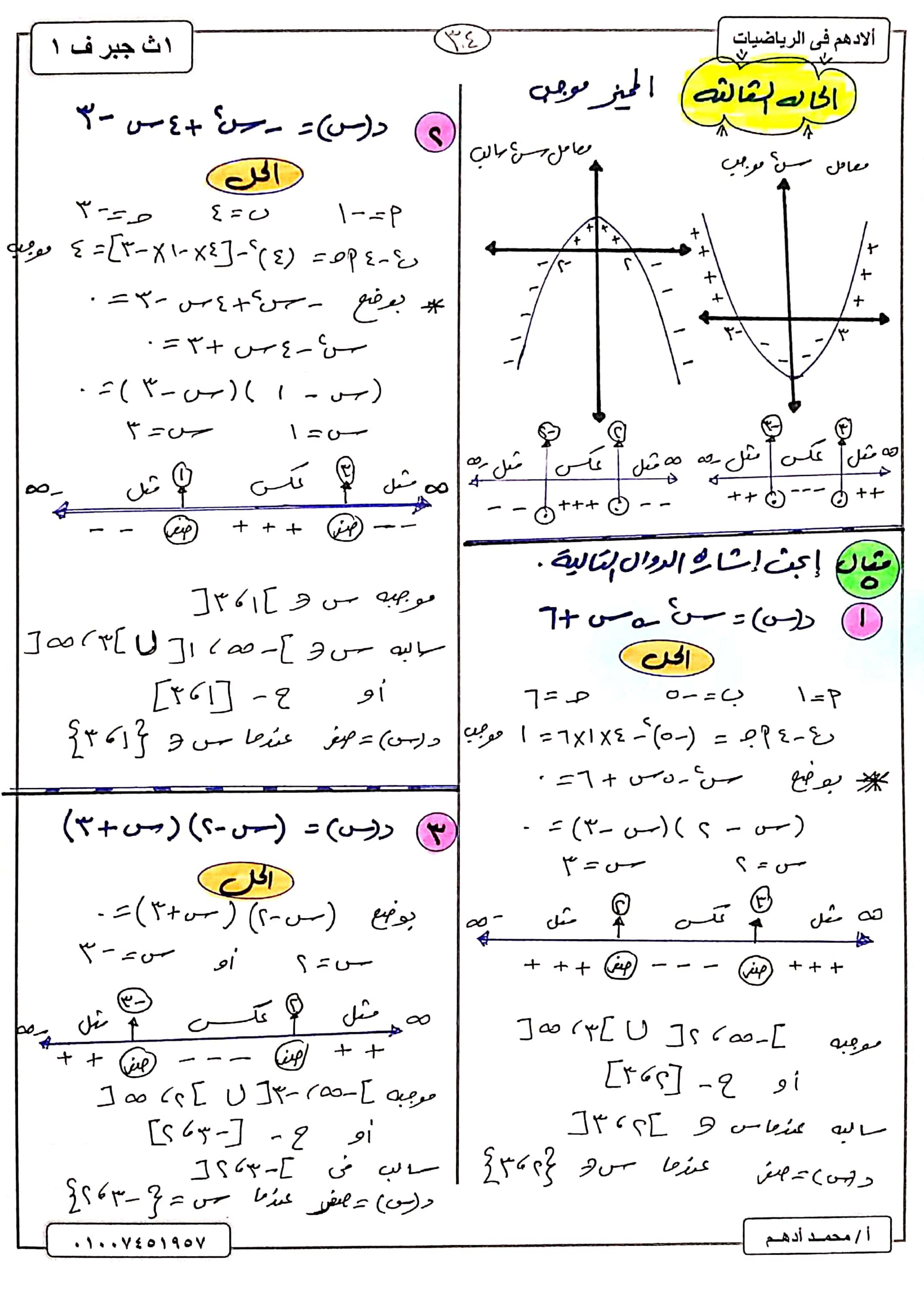
والجذران حقيقيان متساويان

-∞ ← $\frac{٣}{٢}$ → ∞

+ + + صفر + + +

د(س) موجبة عندما س ∈ ح - {$\frac{٣}{٢}$}

د(س) = صفر عندما س = $\frac{٣}{٢}$



الحالة الثالثة: المميز موجب

مثال ٥: ابحث إشارة الدوال التالية.

(١) د(س) = س² − ٥س + ٦

الحل

أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٦

ب² − ٤أجـ = (−٥)² − ٤ × ١ × ٦ = ١ موجب

* بوضع س² − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٢)(س − ٣) = ٠

س = ٢ ، س = ٣

−∞ مثل (٢) عكس (٣) مثل ∞

+ + + صفر − − − − صفر + + +

موجبة]−∞ ، ٢[∪]٣ ، ∞[

أو ح − [٢ ، ٣]

سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[

د(س) = صفر عندما س ∈ {٢ ، ٣}

(٢) د(س) = −س² + ٤س − ٣

الحل

أ = −١ ، ب = ٤ ، جـ = −٣

ب² − ٤أجـ = (٤)² − [٤ × −١ × −٣] = ٤ موجب

* بوضع −س² + ٤س − ٣ = ٠

س² − ٤س + ٣ = ٠

(س − ١)(س − ٣) = ٠

س = ١ ، س = ٣

−∞ مثل (١) عكس (٣) مثل ∞

− − صفر + + + صفر − − −

موجبة س ∈]١ ، ٣[

سالبة س ∈]−∞ ، ١[∪]٣ ، ∞[

أو ح − [١ ، ٣]

د(س) = صفر عندما س ∈ {١ ، ٣}

(٣) د(س) = (س − ٢)(س + ٣)

الحل

بوضع (س − ٢)(س + ٣) = ٠

س = ٢ أو س = −٣

−∞ مثل (−٣) عكس (٢) مثل ∞

+ + صفر − − − صفر + +

موجبة]−∞ ، −٣[∪]٢ ، ∞[

أو ح − [−٣ ، ٢]

سالبة فى]−٣ ، ٢[

د(س) = صفر عندما س = {−٣ ، ٢}

اختبر

تذكر أن ح =]-∞، ∞[

(١) د(س) = -٤ تكون سالبة فى الفترة ...

(أ)]-∞، ٤[(ب)]-٤، ٤[
(ج)]-∞، ∞[(د)]-٢، ٢[

(٢) إذا كانت د(س) = ٣س فإن إشارة د تكون سالبة فى ...

(أ)]-∞، ٣[(ب)]٣، ∞[
(ج)]-٣، ∞[(د)]-∞، ٠[

(٣) د(س) = س^{٢} - ٩ تكون سالبة ∀ س ∈ ....

(أ) ح - [-٣، ٣]   (ب)]-٣، ٣[
(ج)]-∞، ٠[(د)]-٣، ∞[

(٤) د(س) = س^{٢} + ١ تكون موجبة فى الفترة ....

(أ)]٠، ∞[(ب)]١، ∞[
(ج)]-∞، ١[(د) ح

(٥) د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة فى ح عندما

(أ) ب^{٢} - ٤أجـ > ٠   (ب) ب^{٢} - ٤أجـ < ٠
(ج) ب^{٢} - ٤أجـ = ٠   (د) ب^{٢} - ٤أجـ ≥ ٠

(٦) لبحث إشارة د يكون كافياً معرفة أنه ....

(أ) منحنى الدالة د يوازى محور السينات.
(ب) " " د يقع بأكمله فوق محور السينات.
(ج) (أ)، (ب) معاً
(د) ولا حاجة من اللي فات

(٧) إذا كانت د(س) = أس + ب وكانت س = ل جذر للمعادلة د(س) = ٠ فإن د(ل+١) × د(ل-١) ∈ ....

(أ) ح$^{+}$ (ب) ح$^{-}$
(ج) [-١، ١]   (د) [-٥، ٥]

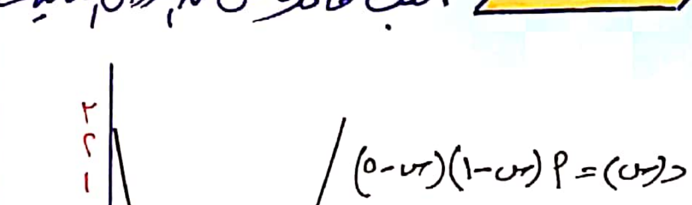
د(ل) = ٠ ، د(ل+١) > ٠ ، د(ل-١) < ٠
∴ حاصل ضربهما < ٠ ∈ ح$^{-}$

(٨) أى الدوال الآتية موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(أ) د(س) = س^{٢} + ٤   (ب) د(س) = ٣
(ج) د(س) = (س-١)^{٢} + ٩   (د) كل ما سبق

مثال

اكتب قاعدة كل من الدوال التالية



د(س) = أ(س-١)(س-٥)

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٣، -٤)

أ(٣-١)(٣-٥) = -٤

أ × ٢ × -٢ = -٤

-٤أ = -٤ ∴ أ = ١ ∴ د(س) = (س-١)(س-٥)

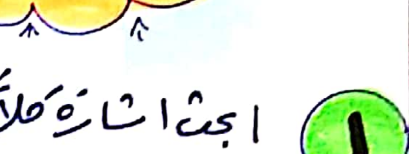
∴ د(س) = س^{٢} - ٦س + ٥

مره واحد رجع من الشغل لقي بيته بيتحرق
راح دخل وجاب بنته وطلع
ورجع مره تانيه وجاب ابنه
ورجع تالت مره وجاب مراته
ورجع رابع مره وجه فاضي
ورجع خامس مره وجه فاضي
فالناس قالوله ليه بتروح وترجع فاضي
قالهم بروح اقلب حماتي



نكت ساخره





١ ابحث اشارة كلا من الدوال التالية

1. د(س) = ٥
2. د(س) = −٩
3. د(س) = س − ١
4. د(س) = −٢س + ٤
5. د(س) = −٣س − ٦
6. د(س) = ٤س − ٥
7. د(س) = ٢ − س

٢ ابحث اشارة كلا من الدوال التالية

1. د(س) = س٢ + ٣س + ٣
2. د(س) = −س٢ + ٥س − ٧
3. د(س) = س٢ − ٨س + ١٦
4. د(س) = −س٢ + ١٠س − ٢٥
5. د(س) = (س − ٣)٢
6. د(س) = س٢ − ٧س + ١٢
7. د(س) = س٢ − ٢س − ١٥
8. د(س) = (س − ٣) (٥ − س)



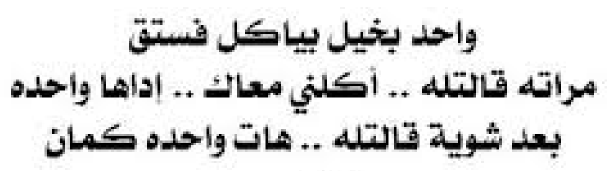
٣ أكمل

1. د(س) = ٢ إشارتها ---- في ----
2. د(س) = −٣س تكون سالبة عندما ----
3. د(س) = س − ٢ موجبة في الفترة ----
4. د(س) = ٧ − س سالبة في الفترة ----
5. د(س) = س٢ تكون سالبة عندما س ∈ ----
6. د(س) = س٢ − ٦س + ٩ موجبة في الفترة ----
7. د(س) = −(س − ١) (س + ٢) موجبة في الفترة ----

الفيزياء كادت ان تكون اسهل



لو ان الشجرة هي التي
سقطت على نيوتن
وليس التفاحة





قالها : والله العظيم كله نفس الطعم

الدرس السابع
متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد

خطوات الحل

١. نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة
٢. ندرس إشارة الدالة التي كتبناها ← الدرس الماضي
٣. نحدد الفترات التي تحقق المتباينة ← بعد ما نعملها متباينة صفرية

مثال ١
أوجد في ح مجموعة حل المتباينة

س² − ٥س + ٦ < ٠

الحل

د(س) = س² − ٥س + ٦

المميز: أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٦

ب² − ٤أجـ = (−٥)² − (٤ × ١ × ٦) = ١ موجب

∴ جذران حقيقيان مختلفان

(س − ٢)(س − ٣) = ٠

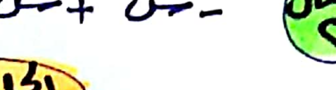
س = ٢ أو س = ٣

−∞   + + + (صفر) ٢ − − − − − (صفر) ٣ + + +   ∞

الطلع بجهة على المتباينة قيمتها أصغر من صفر يعني مخالف الجزء السالب

∴ م.ح =]٢ ، ٣[

مثال ٢



−س² + س − ١ > ٠

الحل

الدالة التربيعية د(س) = −س² + س − ١

أ = −١ ، ب = ١ ، جـ = −١

المميز ب² − ٤أجـ = ١ − (٤ × −١ × −١)
= −٣ (سالب)

ليس لها جذور حقيقية ∴ الإشارة مثل معامل س² سالبة دائماً

∴ م.ح = ∅

مثال ٣



س² − ٦س + ٩ ≤ ٠

الحل

الدالة التربيعية د(س) = س² − ٦س + ٩

أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٩

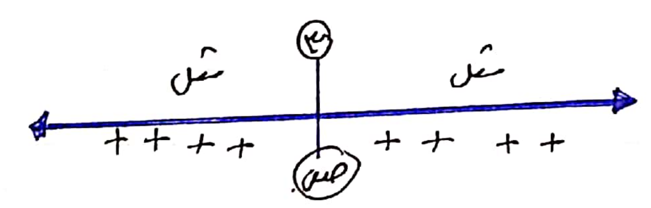
ب² − ٤أجـ = (−٦)² − (٤ × ١ × ٩) = صفر

جذران حقيقيان متساويان

س² − ٦س + ٩ = ٠

(س − ٣)(س − ٣) = ٠

∴ س = ٣



عايزين الأصغر من أو يساوي صفر ومفيش أصغر لكل قيمة = صفر

∴ م.ح = {٣}

٤ $س^2 \geq ٤س - ٤$

الحل

هنعدلها

$س^2 - ٤س + ٤ \geq ٠$

الدالة التربيعية

$د(س) = س^2 - ٤س + ٤$

أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٤

المميز $ب^2 - ٤أجـ = (-٤)^2 - (٤ \times ١ \times ٤) = ٠$

بوضع $س^2 - ٤س + ٤ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٢) = ٠$

∴ س = ٢

−∞ مثل ٢ مثل ∞

++++ صفر ++++

عايزين ≥ يعني الموجب والصفر

∴ م.ح = ح

٥ $٥ - ٢س \leq س^2$

الحل

مش انت عارف إن أ ≤ ب

∴ ب ≥ أ صح ؟

∴ $س^2 \geq ٥ - ٢س$ كدة تمام ؟

$س^2 + ٢س - ٥ \geq ٠$

الدالة التربيعية $د(س) = س^2 + ٢س - ٥$

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٥

المميز $ب^2 - ٤أجـ = (٢)^2 - (٤ \times ١ \times -٥)$

= ٢٤ موجب

جذران حقيقيان مختلفان

الحل بالقانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-٢ \pm \sqrt{٢٤}}{٢ \times ١} = \{-١ + \sqrt{٦} ، -١ - \sqrt{٦}\}$

= {١,٤٥ ، −٣,٤٥}

++ صفر −− صفر ++

∴ م.ح = ح −]−٣,٤٥ ، ١,٤٥[

اختر

١ مجموعة حل المتباينة $(س - ٢)(س - ٥) < ٠$ في ح هي ....

أ {٢ ، ٥} ب]٢ ، ٥[جـ [٢ ، ٥] د ح − [٢ ، ٥]

٢ مجموعة حل المتباينة $س(س - ١) \geq ٠$ في ح ...

أ {٠ ، ١} ب [٠ ، ١] جـ ح −]٠ ، ١[د]٠ ، ١[

٣ مجموعة حل المتباينة $-س(س + ٢) \geq ٠$ في ح هي ...

أ {٠ ، −٢} ب [−٢ ، ٠] جـ]−٢ ، ٠[د [−٢ ، ٢]

(٤) مجموعة حل المتباينة $س^2 + 9 > 0$ في ح هي ....

(أ) ∅ (ب) ح

(ج)]-٣، ٣[(د) ح - [-٣، ٣]

---

(٥) مجموعة حل المتباينة $س^2 + 1 \leq 0$ في ح هي ....

(أ) ∅ (ب) ح

(ج) [-١، ١] (د) ح -]-١، ١[

---

(٦) في الشكل المقابل

يمثل د(س)

فإن مجموعة حل المتباينة

$د(س) \geq 0$ هي ...

(ص، س، و، -١، ٣)

(أ)]-١، ٣[(ب)]-∞، ٢[

(ج)]٣، ∞[(د)]-∞، -١] ∪ [٣، ∞[

---

(٧) مجموع الأعداد الصحيحة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينة $(س-2)(3س-1) \leq 0$

(أ) -١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

[$\frac{1}{3}$، ٢] ١ + ٢ = ٣

---

(٨) إذا كان مميز المعادلة $أس^2 + ب س + جـ = 0$ سالب فإن مجموعة حل المتباينة $أس^2 + ب س + جـ < 0$ حيث $أ < 0$ هو ....

(أ) ح (ب) ∅ (ج) $ح^+$ (د) ح

المنحنى بالكامل أسفل محور السينات

الواجب

(١) أوجد في ح مجموعة حل المتباينات التالية

1. $س^2 + 2س - 8 \geq 0$
2. $س^2 - 1 \leq 0$
3. $2س - س^2 < 0$
4. $س^2 \leq 9$
5. $س^2 \geq 6س - 9$
6. $(س-2)^2 \leq -5$
7. $(س-2)(س-5) < 0$
8. $س(س-1) \geq 0$
9. $س^2 + 9 > 0$

سألوني..

ماذا تعلمت من العمر الذي مضى

فأجبت؟

تعلّمت أن الذي معدنهُ ذهب

يبقى ذهباً

والذي معدنهُ حديد يتغير

ويصدأ..


الأدهم
فى
حساب المثلثات
الصف الأول الثانوى
عام وأزهر
٢٠٢٠
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧



تعريف الزاوية الموجهة :

هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية

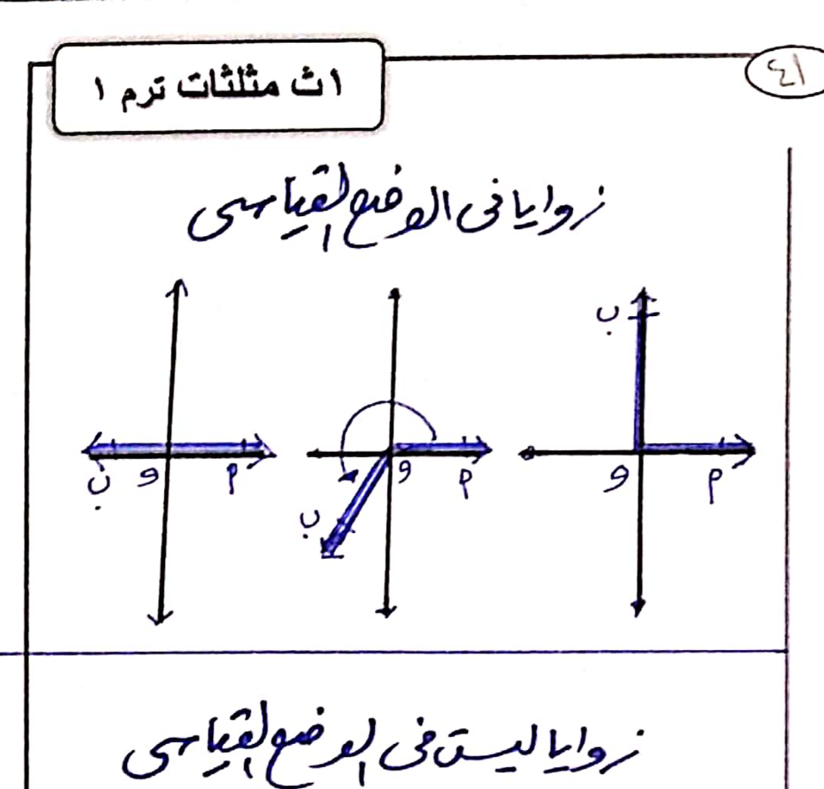
قياس موجب	قياس سالب
(م و ب) ضلع نهائى، موجب، و، ضلع ابتدائى، م، ب	(ب و م) ضلع ابتدائى، ب، سالب، و، ضلع نهائى، م
عكس حركة عقارب الساعه	فى اتجاه حركة عقارب الساعه

الوضع القياسى للزاوية الموجهة

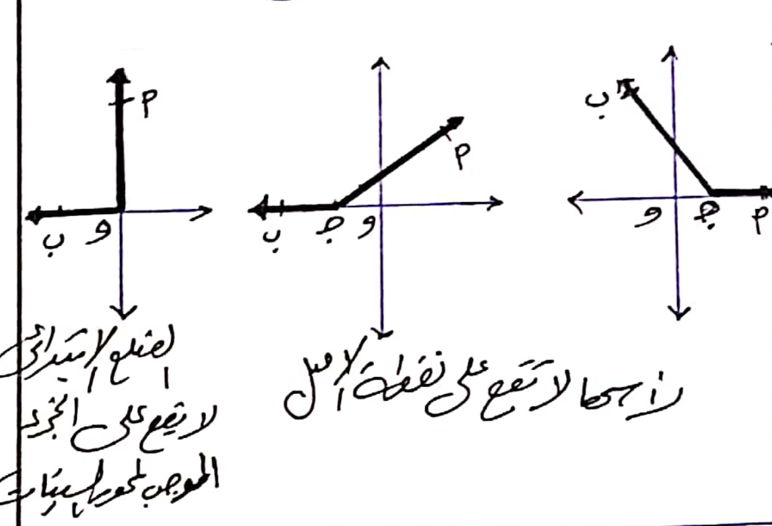
١) رأسها نقطة الأصل .

٢) ضلعها الابتدائى على الجزء الموجب لمحور السينات

زوايا فى الوضع القياسى

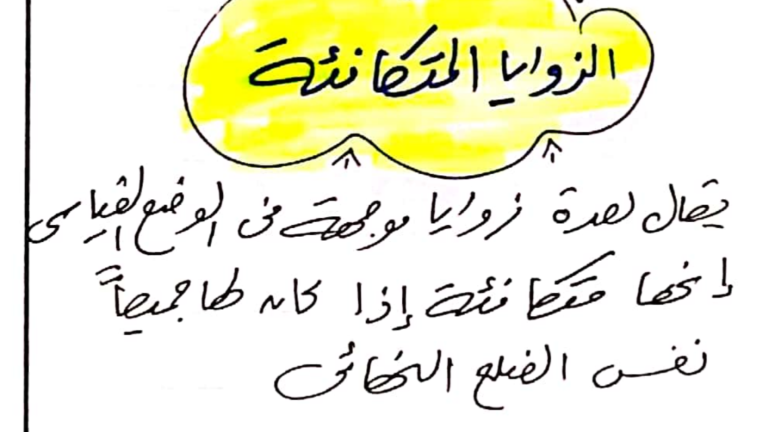


زوايا ليست فى الوضع القياسى

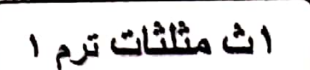


رأسها لا تقع على نقطة الأصل

الضلع الابتدائى لا يقع على الجزء الموجب لمحور السينات



يقال لعدة زوايا موجهة فى الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان لها جميعاً نفس الضلع النهائى



لإيجاد زاوية مكافئة

١) إذا كانت الزاوية سالبة
هنزود ٣٦٠° حتى تصبح موجبة

٢) إذا كانت الزاوية موجبة
هنطرح ٣٦٠° حتى تصبح سالبة

مثال ١ عين أصغر قياس موجب

١) $-120 \Leftarrow -120 + 360 = 240°$

٢) $-450 \Leftarrow -120 + 360 = -90$
$-90 + 360 = 270°$

٣) $-1000 \Leftarrow +360 = -640 + 360$
$= -280 + 360 = 80°$

مثال ٢ عين قياس سالب لكل منه

١) $200 \Leftarrow 200 - 360 = -160°$

٢) $620 \Leftarrow 620 - 360 = 260 - 360$
$= -100°$



مثال ٣ أوجد زاويتين إحداهما قياس موجب والأخرى سالب مكافئين للزوايا التالية.

١) $40°$

الموجب	السالب
$40 + 360 = 400°$	$40 - 360 = -320°$

٢) $-125°$

الموجب	السالب
$-125 + 360 = 235°$	$-125 - 360 = -485°$

٣) $270°$

الموجب	السالب
$270 + 360 = 630°$	$270 - 360 = -90°$

تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية

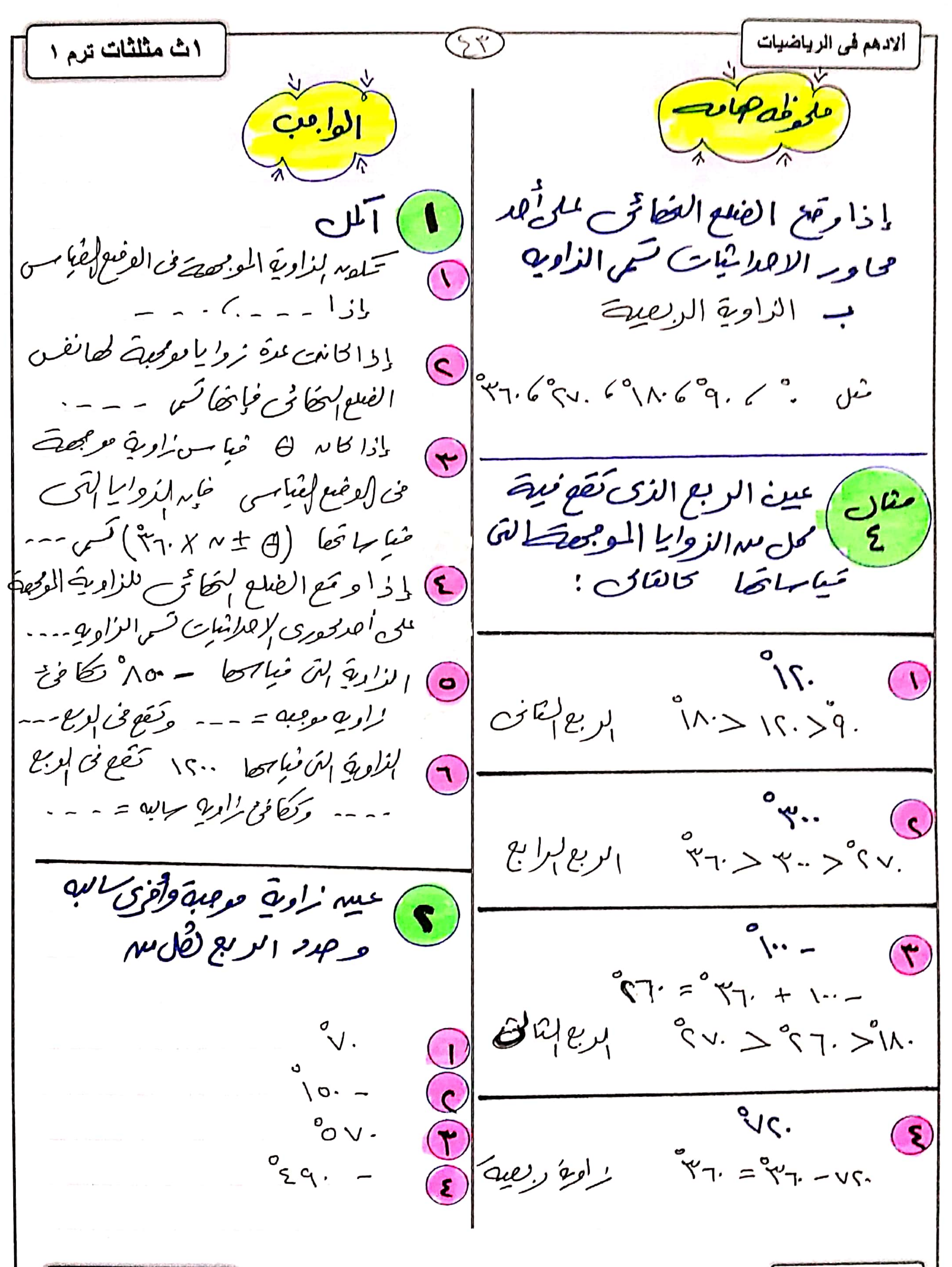
الأول: $0° < \theta < 90°$

الثاني: $90° < \theta < 180°$

الثالث: $180° < \theta < 270°$

الرابع: $270° < \theta < 360°$

(المحاور: $0°$ ، $90°$ ، $180°$ ، $270°$ ، $360°$)



ملحوظة هامة

إذا وقع الضلع النهائي على أحد محاور الإحداثيات تسمى الزاوية بـ الزاوية الربعية

مثل $0°$ ، $90°$ ، $180°$ ، $270°$ ، $360°$

مثال ٤

عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التي قياساتها كالتالي:

(١) $120°$

$90° < 120° < 180°$ الربع الثاني

(٢) $300°$

$270° < 300° < 360°$ الربع الرابع

(٣) $-100°$

$-100° + 360° = 260°$

$180° < 260° < 270°$ الربع الثالث

(٤) $720°$

$720° - 360° = 360°$ زاوية ربعية

الواجب

١ أكمل

(١) تتكافأ الزوايا الموجهة فى الوضع القياسى إذا .... ، ....

(٢) إذا كانت عدة زوايا موجهة لها نفس الضلع النهائي فإنها تسمى ....

(٣) إذا كان θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى فإن الزوايا التى قياساتها $(\theta \pm n \times 360°)$ تسمى ....

(٤) إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية ....

(٥) الزاوية التى قياسها $-850°$ تكافئ زاوية موجبة = ... وتقع فى الربع ....

(٦) الزاوية التى قياسها $1200°$ تقع فى الربع .... وتكافئ زاوية سالبة = ...

٢ عين زاوية موجبة وأخرى سالبة وحدد الربع لكل من

(١) $70°$

(٢) $-150°$

(٣) $570°$

(٤) $-490°$

اختبر على الدرس الأول

١) الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها
(أ) ١٢٠° (ب) ٢٤٠° (ج) ٣٠٠° (د) ٤٢٠°

٢) الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ ....
(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (ج) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

٣) الربع الذى تقع فيه الزاوية ١٦٧٠° هو...
(أ) الأول (ب) الثانى (ج) الثالث (د) الرابع

٤) الزاوية التى قياسها (-٨٥٠°) تقع فى الربع...
(أ) الأول (ب) الثانى (ج) الثالث (د) الرابع

٥) الزاوية التى قياسها ٤٥° + (٤ن+١) × ٩٠° تقع فى الربع ... حيث ن ∈ ص
(أ) الأول (ب) الثانى (ج) الثالث (د) الرابع

عند وضع ن = ٠ ⟸ هـ = ٤٥ + ٩٠ = ١٣٥°

٦) إذا كان أ ، ب قياسا زاويتان متكافئتين فإن -أ ، -ب يكونان ....
(أ) متطابقتين (ب) متكافئتين
(ج) متساويتين (د) مجموعهما - ٣٦٠°

٧) إذا كان هـ ، -هـ قياسا زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم هـ هى ....
(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (ج) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

٨) إذا كان (٣س - ٥) أصغر قياس موجب ، (٣ص - ٥) أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فإن س - ص = ...
(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (ج) ١٢٠° (د) ٩٠°

٣س - ٥ - (٣ص - ٥) = ٣٦٠
٣س - ٥ - ٣ص + ٥ = ٣٦٠
٣س - ٣ص = ٣٦٠ ∴ س - ص = ١٢٠°

٩) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٦٠° من الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل ....
(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (ج) ١٥٠° (د) ٢٤٠°

احذف عدد الدورات الكاملة واحسب الربع فقط
∴ ٦٠° + ٩٠° = ١٥٠°

نفسي ارجع للزمن اللي كان



أصعب قرار بيواجهني هو
يا ترى اشتري شيبسي بالطماطم
ولا بالشطه والليمون

الدرس الثاني
القياس الستيني والقياس الدائري

القياس الستيني (س°)

$1^\circ = 60'$

$1' = 60''$

∴ $1^\circ = 3600''$

القياس الدائري $\theta^{د}$

$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$

$\theta^{د}$ ← الزاوية بالقياس الدائري

ل ← طول القوس المقابل للزاوية المركزية

نق ← نصف قطر الدائرة.



الزاوية النصف قطرية: هي زاوية مركزية تحصر قوساً (ل) طوله = نصف قطر الدائرة (نق)

$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{\text{نق}}{\text{نق}} = 1^{د}$

∴ الزاوية النصف قطرية = $1^{د}$

مثال ١: أوجد القياس الدائري لكل مما

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم

الحل

$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{12}{10} = 1.2^{د}$

(٢) ل = ٧ سم ، طول القطر = ٢٠ سم

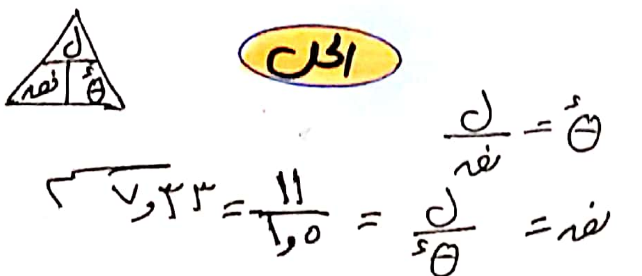
الحل

ل = ٧ سم ، $\text{نق} = \frac{20}{2} = 10$ سم

$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{7}{10} = 0.7^{د}$

مثال ٢: أوجد نق لكل مما

$\theta^{د} = 1.5^{د}$ ، ل = ١١ سم



الحل

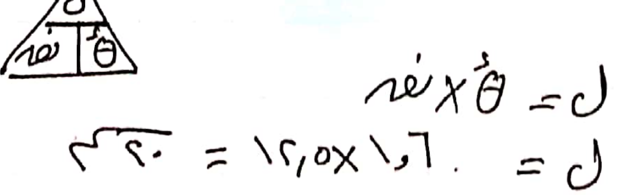
$\theta^{د} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$

$\text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^{د}} = \frac{11}{1.5} = 7.33$ سم

مثال ٣: أوجد طول القوس

نق = ١٢٫٥ سم ، $\theta^{د} = 1.6^{د}$

الحل



$\text{ل} = \theta^{د} \times \text{نق}$

$\text{ل} = 1.6 \times 12.5 = 20$ سم

مهم جداً

العلاقة بين الدائرى "$\theta^{د}$" والستينى "$س^{\circ}$"

$$\frac{س^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\theta^{د}}{\pi}$$



وتحل $س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{180}{\pi}$

وتحل (D ⇔ S) $\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180}$

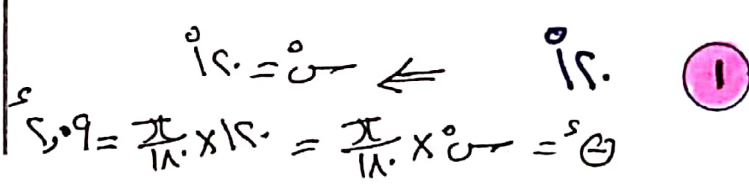
علشان متنساش

1. الستينى أكبر لذلك يبقى $\times \frac{180}{\pi}$
2. الدائرى أصغر لذلك يبقى $\times \frac{\pi}{180}$

ولو نسيت احفظ أول مربع هيجيبلك القانونين

مثال ٤: حول إلى القياس الدائرى

1. 120° ⟸ $س^{\circ} = 120^{\circ}$



$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180} = 120 \times \frac{\pi}{180} = 2.09^{د}$

2. $105^{\circ}\ 22'$

$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$

$= 105^{\circ}\ 22' \times \frac{\pi}{180}$

$= 1.84^{د}$

3. $75^{\circ}\ 12'\ 30''$

$\theta^{د} = 75^{\circ}\ 12'\ 30'' \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$

$\theta^{د} = 1.31^{د}$

مثال: حول إلى القياس الستينى

1. $1.8^{د}$

$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{180}{\pi} = 1.8 \times \frac{180}{\pi}$

$= 103^{\circ}\ 7'\ 56''$

2. $\frac{1}{4}\pi$

$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{180}{\pi} = \frac{1}{4}\pi \times \frac{180}{\pi} = 45^{\circ}$

مثال: حدد الربع الذى تقع فيه

1. $5.7^{د}$

$س^{\circ} = 5.7 \times \frac{180}{\pi} = 326^{\circ}\ 35'$

فى الربع الرابع

الفكرة الثامنة

مثال ٧ أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها ٣٥ً ١٢َ ١١٠° إذا كان نق = ١٠ سم لأقرب سم

الحل

س° = ٣٥ً ١٢َ ١١٠° ، نق = ١٠ سم

الأول هنحول للدائري

$\theta^{د} = $ س° $\times \frac{\pi}{180} = $ ٣٥ً ١٢َ ١١٠° $\times \frac{\pi}{180}$

= ١,٩٢ د

∵ ل = $\theta^{د} \times$ نق

= ١,٩٢ × ١٠ = ١٩,٢ ≃ ١٩ سم

مثال ٨ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاوية محيطية = ٨٠°

الحل

طبعاً نحن نعمل بالزاوية المركزية وانتوا فاكرين إن المركزية ضعف المحيطية = ٢ × ٨٠° = ١٦٠°

∵ س° = ١٦٠°

$\theta^{د} = $ ١٦٠ $\times \frac{\pi}{180} = $ ٢,٧٩ د

المركزية = المحيطية × ٢

المحيطية = المركزية ÷ ٢

مثال ٩ أوجد محيط دائرة بها زاوية محيطية = ٣٠° يقابلها قوس = ٥ سم

الحل

∵ قياس المحيطية = ٣٠°

∴ قياس المركزية المشتركة معها في القوس = ٦٠°

س° = ٦٠°

∵ $\theta^{د} = $ س° $\times \frac{\pi}{180} = $ ٦٠° $\times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

نق = $\frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{5}{(\frac{\pi}{3})}$

= $\frac{15}{\pi}$ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × π × $\frac{15}{\pi}$ = ٣٠ سم

ملحوظة

في مسائل محيط ومساحة الدائرة يفضل تجيب القياس الدائري ونقد بدلالة π

طبعاً انت فاكر إن

١) محيط الدائرة = ٢ π نق

٢) مساحة الدائرة = π نق²

مثال في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م ، ق(∠جـ م ب) = ٦٠° ، أم = ١٢ سم

أوجد طول القوس الأكبر بـ جـ لأقرب سم

الحل

من هندسة الشكل ق(أ̂) = ٦٠°

∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ⊥ $\overline{م جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overline{م ب}$ (لأن المماس ⊥ نصف القطر)

∴ ق(جـ م̂ ب) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٦٠°]

= ١٢٠°

∴ ق(جـ م̂ ب) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠°

= ٢٤٠°

∴ θ = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٤}{٣}\pi$

في △ أ ب م ∵ أم = ١٢ سم

∴ ب م = ٦ سم لأن طول الضلع المقابل (٣٠°) في المثلث القائم = نصف طول الوتر

∴ نق = ٦ سم

ل = θ × نق = $\frac{٤}{٣}\pi$ × ٦ = ٢٥ سم

مثال ١١ مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{٤}$ أوجد القياس الدائري والستيني للزاوية الثالثة.

الحل

قياس الأولى = ٦٠°

قياس الثانية = $\frac{\pi}{٤} \times \frac{١٨٠}{\pi}$ = ٤٥°

∴ قياس الثالثة = ١٨٠ − [٦٠ + ٤٥]

س° = ٧٥°

θ = س° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٧٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٣١ ^ء^

مثال ١٢ زاويتان متكاملتان الفرق بينهما = $\frac{\pi}{٣}$ أوجد قياسهما بالدائري والستيني

س = $\frac{\pi}{٣} \times \frac{١٨٠}{\pi}$ = ٦٠°

الفرق بينهما = ٦٠°

الحل

س + ص = ١٨٠°

س − ص = ٦٠°

٢ س = ٢٤٠

∴ س = ١٢٠°

= ١٢٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٢}{٣}\pi$

١٢٠ + ص = ١٨٠°

∴ ص = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

= ٦٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{١}{٣}\pi$

اختبر نفسك على الدرس

لاحظ أنه في الزوايا $\pi = 180°$
في الأطوال $\pi = \frac{22}{7}$ أو ٣٫١٤

١) الزاوية التي قياسها $\frac{31\pi}{6}$ تقع في الربع ....
(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث ✓ (د) الرابع

٢) الزاوية التي قياسها $-\frac{9\pi}{4}$ تقع في الربع ....
(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع ✓

٣) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ...
(أ) 2π ✓ (ب) π (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 3π

٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم $= 180 \times (ن - 2)$ حيث ن عدد الأضلاع
فإن قياس زاوية الخماسي المنتظم = ...
(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{7\pi}{2}$ (ج) $\frac{3\pi}{5}$ ✓ (د) $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{180 \times (5-2)}{5} = \frac{540}{5} = 108$ ، $108° = \frac{3\pi}{5}$

٥) القوس الذي طوله 5π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها = ...
(أ) $30°$ (ب) $60°$ ✓ (ج) $90°$ (د) $180°$

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{3} = \frac{180}{3} = 60°$ ($\pi = 180$)

٦) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{1}{10}\pi$ فإن طول قوسه = ... سم
(أ) ٤٫٦ (ب) ٤٫٤ ✓ (ج) ٤٫٢ (د) ٤٫٨

نق = ١٤ ، $ل = \theta^{د} \times نق = 14 \times \frac{1}{10}\pi = 4.4$ (π = ٣٫١٤)

٧) إذا كان طول قوس من الدائرة = $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية المقابلة له هي ....
(أ) $30°$ (ب) $67°30'$ (ج) $135°$ ✓ (د) $43°$

$ل = \theta^{د} \times نق$ ∴ $\frac{3}{8} \times 2\pi$ ~~نق~~ $= \theta^{د} \times$ ~~نق~~
∴ $\theta^{د} = \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \times 180° = 135°$

٨) في الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة الطول قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري = ...
(أ) $\frac{1}{4}$ طول القوس (ب) $\frac{1}{2}$ طول القوس (ج) طول القوس ✓ (د) ضعف طول القوس

$ل = \theta^{د} \times نق$ عندما نق = ١ ∴ $ل = \theta^{د}$

٩) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعي كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه = ...
(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ ✓ (ج) $\frac{5\pi}{12}$ (د) $\frac{2\pi}{3}$

مجموع الأجزاء = ٢٤ أصغر الزوايا هي $= \frac{360}{24} \times 4 = 60$

ملحوظة
قياس الزاوية بين عقربي الساعات والدقائق $= |$ عدد الساعات $\times 30 -$ عدد الدقائق $\times \frac{11}{2} |$

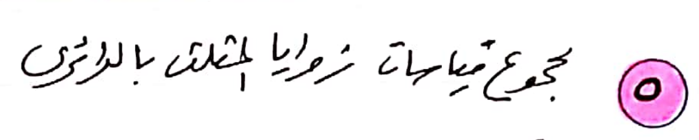
١٠) القياس الموجب بين عقربي الساعة عندما الساعة الثانية والنصف = ...

٢ : ٣٠

$2 \times 30 - 30 \times \frac{11}{2} = -105 = 105° \div 180 = \frac{7\pi}{12}$







١. مجموع قياس الزاويتين المتتامتين = ٩٠°
٢. " " " المتكاملتين = ١٨٠°
٣. فى المثلث القائم طول الضلع المقابل
   * للزاوية ٣٠° = $\frac{1}{2}$ × طول الوتر
   * للزاوية ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × طول الوتر
٤. مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°
٥. قياس الدائرة = ٣٦٠°
٦. محيط الدائرة = ٢ط نق
٧. مساحة الدائرة = ط نق²

٥. مجموع قياسات زوايا المثلث بالدائرى ----
٦. مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى = ----
٧. القوس الذى طوله ٥ سم فى دائرة طول قطرها ٣٠ سم يقابل زاوية مركزية = ----°
٨. الزاوية التى طول قوسها = نق تسمى زاوية ----
٩. الدائرة التى طول نصف قطرها = وحدة الأطوال تسمى ----

الواجب

١ أكمل

١. الزاوية التى قياسها $\frac{31ط}{6}$ تقع فى الربع ----
٢. الزاوية التى قياسها $-\frac{9ط}{4}$ تقع فى الربع ----
٣. الزاوية التى قياسها $\frac{8ط}{3}$ فإن قياسها الدائرى = ----
٤. الزاوية التى قياسها ١,٣ د فإن قياسها الستينى = ----

٢ أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية ٣٠َ ١٠٢° فى دائرة نصف قطرها = ٦ سم لأقرب ١ سم

٣ أوجد كلاً من القياس الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٦٠ سم فى دائرة طول نصف قطرها ١,٧ سم

٤ أوجد محيط الدائرة التى بها زاوية محيطية = ٥٧° تقابل قوس طوله ٣ سم

الوفاء
غالي جدا فلا تتوقعه
من رخيص

الدرس الثالث
الدوال المثلثية

تذكر أن

المقابل، الوتر، المجاور

$جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر}$

$جتا\theta = \frac{المجاور}{الوتر}$

$ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta} = \frac{المقابل}{المجاور}$

الدوال المثلثية من دائرة الوحدة

ملاحظات

(١) دائرة الوحدة: هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة الأطوال

(٢) $س^٢ + ص^٢ = ١$

، $س \in [-١ ، ١]$

، $ص \in [-١ ، ١]$

(٣) $جا\theta = ص$ الاحداثي الصادى

(٤) $جتا\theta = س$ الاحداثي السيني

(٥) $ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta} = \frac{ص}{س}$

المقلوبات

(١) $قا\theta = \frac{١}{جتا\theta}$

(٢) $قتا\theta = \frac{١}{جا\theta}$

(٣) $ظتا\theta = \frac{١}{ظا\theta}$

الفكرة الأولى
مباشرة

مثال ١ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية θ مرسومة في دائرة الوحدة إذا كان م إحداثيات ضلعها النهائي

(١) $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ (س ، ص)

الحل

$جا\theta = ص = \frac{٤}{٥} \leftarrow قتا\theta = \frac{٥}{٤}$

$جتا\theta = س = \frac{٣}{٥} \leftarrow قا\theta = \frac{٥}{٣}$

$ظا\theta = \frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣} \leftarrow ظتا\theta = \frac{٣}{٤}$



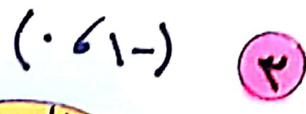
$(1 ، 0)$ (ص ، س)

الحل

جاθ = ص = ١ ⟸ قتاθ = $\frac{1}{1}$ = ١

جتاθ = س = ٠ ⟸ قاθ = $\frac{1}{0}$ = غير معرف

ظاθ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{1}{0}$ غير معرف ⟸ ظتاθ = $\frac{0}{1}$ = صفر



٣) $(0 ، 1-)$

الحل

جاθ =   قتاθ =

جتاθ =   قاθ =

ظاθ =   ظتاθ =

---

٤) $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل

جاθ =   قتاθ =

جتاθ =   قاθ =

ظاθ =   ظتاθ =

الفكرة الثانية تحتاج معادلة

٥) أ$\left(ص ، \frac{-1}{2}\right)$ حيث ص > ٠

الحل

∵ س² + ص² = ١

$\left(\frac{-1}{2}\right)^2$ + ص² = ١

$\frac{1}{4}$ + ص² = ١

ص² = ١ − $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$

∴ ص = ± $\sqrt{\frac{3}{4}}$ = ± $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ ص > ٠ ∴ ص = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ أ$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{-1}{2}\right)$

جاθ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ قتاθ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

جتاθ = $\frac{-1}{2}$ قاθ = $\frac{2}{-1}$ = −٢

ظاθ = $\frac{\sqrt{3}}{-1}$ = $-\sqrt{3}$ ظتاθ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

---

٦) أ(−ص ، −ص) ، ص > ٠

الحل

(−ص)² + (−ص)² = ١

ص² + ص² = ١

٢ص² = ١ ⟸ ص² = $\frac{1}{2}$

∴ ص = ± $\sqrt{\frac{1}{2}}$ = ± $\frac{1}{\sqrt{2}}$

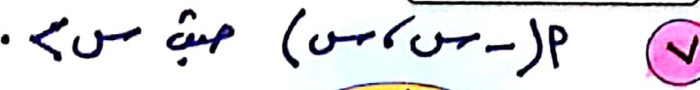
∵ ص > ٠ ∴ ص = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ أ$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} ، \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

جاθ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ قتاθ = $\frac{\sqrt{2}}{-1}$ = $-\sqrt{2}$

جتاθ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ قاθ = $-\sqrt{2}$

ظاθ = ١   ظتاθ = ١



٧) أ(−س ، س) حيث س > ٠



الحل

$(-س)^2 + (س)^2 = ١$

$س^2 + س^2 = ١ \Leftarrow ٢س^2 = ١$

$س^2 = \frac{١}{٢}$ ، $س = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\because س > ٠ \quad \therefore س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore أ\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

$جا\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}} \leftarrow قتا\theta = \sqrt{٢}$

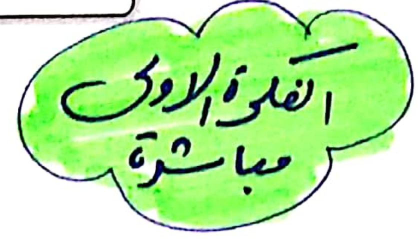
$جتا\theta = \frac{-١}{\sqrt{٢}} \leftarrow قا\theta = -\sqrt{٢}$

$ظا\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}} \div \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١ \leftarrow ظتا\theta = \frac{-١}{١} = -١$



الربع الثانى	الربع الأول
جا ، قتا موجبتان والباقى سالب	كل الدوال موجبة
ظا وظتا موجبتان والباقى سالب	جتا ، قا موجبتان والباقى سالب
الربع الثالث	الربع الرابع

كل جبار ظالم جتا داهية تافه



مثال حدد اشارة كل من النسب المثلثية

١) جا ١٢٠°

١٢٠° ⟸ فى الربع الثانى [جا موجبة]

٢) جتا ٩٧٠°

$(٩٧٠ - ٣٦٠) = ٦١٠ - ٣٦٠ = ٢٥٠°$

٢٥٠° فى الربع الثالث جتا سالبة

٣) قتا $\left(\frac{-٣}{٥}\pi\right)$

$\left(\frac{-٣}{٥} \times ١٨٠\right) = -١٠٨ + ٣٦٠ = ٢٥٢°$

فى الربع الثالث ظا وظتا موجبتان

∴ الاشارة موجبة



انت ممكن تكتبهم على الآلة وتشوف الاشارة وتريح نفسك

ومتنساش (π) فى النسب = ١٨٠°

الفكرة الثانية غير مباشرة

(١) إذا كانت النقطة (٠,٨ ، ص) تقع على الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها θ في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة حيث $270° < \theta < 360°$ فأوجد قيم جا θ ، ظتا θ ، قا θ

الحل

$\because$ $س^2 + ص^2 = 1$

$(0.8)^2 + ص^2 = 1$

$ص^2 = 1 - (0.8)^2 = 0.36$

$\therefore$ $ص = \pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$

في $\because$ $270° < \theta < 360°$

في الربع الرابع تكون س موجبة ، ص سالبة (جا)

$\therefore$ $ص = -0.6$

$\therefore$ $(0.8 \,،\, -0.6)$

$\text{جا}\,\theta = -0.6$

$\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \frac{س}{ص} = \frac{0.8}{-0.6} = \frac{-4}{3}$

$\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{1}{س} = \frac{1}{0.8} = \frac{5}{4}$

(٢) أ(س ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$) ، $90° < \theta < 180°$

أوجد قيمة جا θ ، قا θ ، ظا θ

الحل

$\because$ $س^2 + ص^2 = 1$

$س^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$س^2 + \frac{3}{4} = 1$

$س^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$س = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

$\because$ $90° < \theta < 180°$

في الربع الثاني تكون (س) سالبه (جتا)

أ$\left(-\frac{1}{2} \,،\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{2}{-1} = -2$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{ص}{س} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{-1}{2}$

$= -\sqrt{3}$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

* أولاً: ٣٠°، ٦٠°

٣٠°	٦٠°
جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$	جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$
ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$	ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

(مثلث قائم الزاوية: الوتر ٢، الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = ١، الضلع المجاور = $\sqrt{٣}$)

* ثانياً: ٤٥°

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٤٥ = ١

(مثلث قائم متساوي الساقين: الساقان ١، ١ والوتر $\sqrt{٢}$)

* ثالثاً: للزوايا الربعية

(دائرة الوحدة: ٠° أو ٣٦٠° ← (١، ٠)؛ ٩٠° ← (٠، ١)؛ ١٨٠° ← (-١، ٠)؛ ٢٧٠° ← (٠، -١)، حيث الإحداثي الأول جتا والثاني جا)

لو فهمت أنا ازاى كتبت الاحداثيات بتاعت دائرة الوحدة وعرفت إن جتا = س ، جا = ص هتعرف تفهم كويس جداً الجدول اللى هكتبه

① الزاوية ٠° أو ٣٦٠° (١، ٠)

جا ٠° = ٠

جتا ٠° = ١

ظا ٠ = $\frac{جا}{جتا}$ = $\frac{٠}{١}$ = صفر

② الزاوية ٩٠° (٠، ١)

جا ٩٠° = ١

جتا ٩٠° = ٠

ظا ٩٠° = غير معرف

③ الزاوية ١٨٠° (-١، ٠)

جا ١٨٠° = ٠

جتا ١٨٠° = -١

ظا ١٨٠° = صفر

④ الزاوية ٢٧٠° (٠، -١)

جا ٢٧٠° = -١

جتا ٢٧٠° = ٠

ظا ٢٧٠° = غير معرف

في الجنة هناك بيوتا
تبنى بالذكر
فاذكروا الله كثيراً ♡.

مثال ٤: بدون استخدام الآلة أوجد قيمة كل مما يأتي

١) ٤ جا ٣٠° جا ٩٠° − جتا ٦٠° قتا ٣٠° + ٥ ظا ٤٥°

الحل

$4 \times \frac{1}{2} \times 1 - 1 \times 2 + 5 \times 1$

$2 - 2 + 5 = 5$

---

٢) جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠° − جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

الحل

$0 \times 2 + (\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} - 0 \times 0$

$0 + 2 \times \frac{1}{2} - 0 = 1$

---

٣) ٣ جا ٣٠° ظا ٤٥° − ٢ قا² ٤٥° − ظا² ٦٠° + جا ٦٠° ظا ٣٠°

الحل

$3 \times \frac{1}{2} \times 1 - 2 \times (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{2} - 4 - 3 + \frac{1}{2} = -5$

---

٤) ٣ ظا² ٣٠° + $\frac{4}{3}$ جتا² ٣٠° − $\frac{1}{8}$ قتا⁴ ٦٠°

الحل

$3 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4$

$3 \times \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \times 16$

$1 + 1 - 2 =$ صفر

---

٥) اثبت أن: جتا $\frac{\pi}{2}$ = جتا² $\frac{\pi}{4}$ − جا² $\frac{\pi}{4}$

الحل

الطرف الأيمن = جتا ($\frac{\pi}{2}$) = جتا ($\frac{180}{2}$) = جتا ٩٠°

جتا ٩٠° = ٠

الطرف الأيسر = جتا² ($\frac{180}{4}$) − جا² ($\frac{180}{4}$)

= جتا² ٤٥ − جا² ٤٥

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$ صفر

∴ الطرفان متساويان

---

٦) أوجد قيمة س التي تحقق أن:

س جا $\frac{\pi}{6}$ جتا² $\frac{\pi}{4}$ = جتا² ٣٠° جا $\frac{\pi}{2}$

الحل

∴ س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠° جا ٩٠°

∴ $س \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 1$

$س \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

∴ $س = \frac{3}{4} \div \left(\frac{1}{4}\right)$

∴ $س = 3$

---

* عندك طريقتين
* تقسم على المعامل
* أو تضرب فى المقلوب الضربي للمعامل

اختبر على الدرس ٣

١) إذا كان جا θ = -١ ، جتا θ = ٠ فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 2π

٢) إذا كانت قتا θ = ٢ حيث θ حادة فإن θ = ...

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

$جا θ = \frac{1}{2}$

٣) إذا كان ظا θ = ١ فإن θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٩٠°

٤) إذا كان جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن جا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ج) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

θ = ٣٠° ∴ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

٥) إذا كان جتا θ = $\frac{1}{2}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{5\pi}{6}$ (ج) $\frac{5\pi}{3}$ (د) $\frac{11\pi}{6}$

٦) إذا كان ب ◺ وكان ق(أ) = ٢ ق(ج) فإن قا أ + قتا ج = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

ق(أ) = ٦٠° ق(ج) = ٣٠°

جا ٦٠° = $\frac{1}{جتا ٦٠}$ = ٢ قتا ٣٠° = $\frac{1}{جا ٣٠}$ = ٢

٢ + ٢ = ٤

٧) إذا كان أ هي أكبر زاوية حادة في مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣ سم فإن ظتا أ = ...

(أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{5}{13}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{12}{5}$

دي زاوية حادة في مثلث قائم

ظتا أ = $\frac{المجاور}{المقابل}$ = $\frac{5}{12}$

٨) في الشكل المقابل

د ب جتا ب + د ج جتا ج = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٤ (د) ٤٨

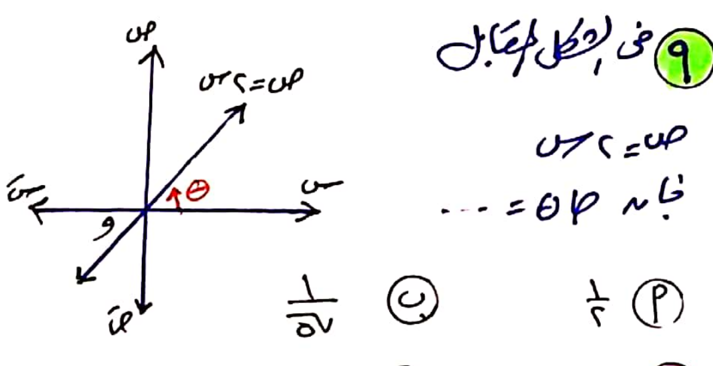
$\frac{6}{أب} \times أب + \frac{8}{أج} \times أج$ = ٦ + ٨ = ١٤

٩) في الشكل المقابل

ص = ٢ س

فإن جا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ج) ٠,٨٩ (د) $\frac{1}{3}$



الميل = ٢ ∴ ظا θ = ٢ ∴ θ = ظا⁻¹ ٢ = □

جا □ = ٠,٨٩

إذا خدعك شخص فهو حقير
وان خدعك مره اخرى فهو أحقر
وان خدعك مرة ثالثة



فـــ أنت مسخره الصراحه



١ ابحث اشارة

1. جا ٧٠°
2. ظا ١٢٠°
3. قتا ١٢٠٠°
4. ظا ٤١٠°

٢ أوجد جميع النسب المثلثية

1. $\left(\frac{2}{3} ، \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
2. (٠,٦ ، −٠,٨)
3. (−١ ، ٠)

٣ أوجد النسب المثلثية إذا كانت

1. م (س ، $\frac{1}{2}$) ، س > ٠
2. م (٠,٦ ، ص) ، س < ٠
3. م (س ، −س) ، س > ٠
4. م (−س ، −س) ، س < ٠

٤ أوجد قيمة ما يلي

1. جا ٠° + جا ٢٧٠° + جا ٩٠° + جا ١٨٠°
2. $ظا^2$ ٣٠° + ٢ جا ٤٥° + $جتا^2$ ٩٠°
3. جتا $\frac{\pi}{2}$ جتا ٠ + جا $\frac{3\pi}{2}$ جا $\frac{\pi}{2}$
4. ٣ جا ٣٠° $جا^2$ ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° $جتا^2$ ٤٥°

٥ اثبت أن

1. جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = $جا^2 \frac{\pi}{4}$
2. جتا $\frac{\pi}{2}$ = $جتا^2 \frac{\pi}{4}$ − $جا^2 \frac{\pi}{4}$
3. ٢ $جا^2$ ٩٠° = − ٢ جتا ١٨٠°

٦ أوجد قيمة س إذا كانت

1. س $جا^2 \frac{\pi}{4}$ جتا π = $ظا^2 \frac{\pi}{3}$ جا $\frac{3\pi}{2}$
2. س جا $\frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ قتا $\frac{\pi}{6}$ = $ظا^2 \frac{\pi}{4}$ − $جتا^2 \frac{\pi}{3}$

من قال سبحان الله وبحمده غرست له نخلة في الجنة

لا حول ولا قوة إلا بالله كنز من كنوز الجنة

اشكروا من ذكر الله حتى لا يشغلكم الشيطان ويضيع عليكم أوقات المذاكرة.

وفقكم الله

الدرس الرابع
الزوايا المنتسبة

لاحظ أن

في الربع الثاني

1. $جا(180 - \theta) = جا\ \theta$
2. $جتا(180 - \theta) = -جتا\ \theta$
3. $ظا(180 - \theta) = -ظا\ \theta$

في الربع الثالث

1. $جا(\theta + 180) = -جا\ \theta$
2. $جتا(\theta + 180) = -جتا\ \theta$
3. $ظا(\theta + 180) = ظا\ \theta$

في الربع الرابع

1. $جا(\theta - 360) = -جا\ \theta$
2. $جتا(\theta - 360) = جتا\ \theta$
3. $ظا(\theta - 360) = -ظا\ \theta$

الزاوية $(-\theta)$ تكافئ $(360 - \theta)$ يعني في الربع الرابع

1. $جا(-\theta) = -جا\ \theta$
2. $جتا(-\theta) = جتا\ \theta$
3. $ظا(-\theta) = -ظا\ \theta$

الزوايا $90^\circ \pm \theta$ ، $270^\circ \pm \theta$ بتعمل تغيير تاني

جا ← جتا ، جتا ← جا

في الربع الثاني

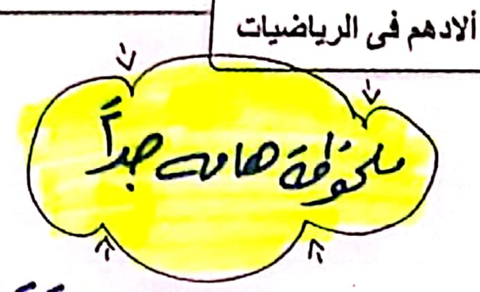
1. $جا(90 + \theta) = جتا\ \theta$
2. $جتا(90 + \theta) = -جا\ \theta$
3. $ظا(90 + \theta) = -ظتا\ \theta$

في الربع الثالث

1. $جا(270 - \theta) = -جتا\ \theta$
2. $جتا(270 - \theta) = -جا\ \theta$
3. $ظا(270 - \theta) = ظتا\ \theta$

في الربع الرابع

1. $جا(270 + \theta) = -جتا\ \theta$
2. $جتا(270 + \theta) = جا\ \theta$
3. $ظا(270 + \theta) = -ظتا\ \theta$



ده ملخص للزوايا اللي هتقابلك

$120° = (180° - 60°)$

$135° = (180° - 45°)$

$150° = (180 - 30°)$

$210° = (180° + 30°)$

$225° = (180° + 45°)$

$240° = (180° + 60°)$

$300° = (360° - 60°) = -60°$

$315° = (360° - 45°) = -45°$

$330° = (360° - 30°) = -30°$

لاحظ

أنا عملتهم بدلالة ١٨٠° لانها أسهل مفيهاش تغيير شامل تبكون أسهل من ٩٠° أو ٢٧٠°

وتحفظ الصفحة اللي فاتت وإشارات الدوال وانت تبقى ممتاز إن شاء الله





أوجد قيمة ما يأتي



١ جتا ٢٤٠°

الحل

جتا $(180 + 60)°$ في الربع الثالث

$= -$ جتا $60 = -\frac{1}{2}$



٢ جا ٥٧٠°

الحل

جا $(570° - 360°) =$ جا $(210°)$

$=$ جا $(180° + 30°)$ في الربع الثالث

$= -$ جا $30 = -\frac{1}{2}$



٣ ظتا ١٣٥°

الحل

ظتا $(180° - 45°)$ في الربع الثاني

$= -$ ظتا $45 = -1$



٤ ظا $(-150°)$

الحل

ظا $(-150 + 360°) =$ ظا $(210°)$

$=$ ظا $(180 + 30°) =$ ظا $30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$



بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن



جتا (−١٥٠°) جا ٦٠٠° + جتا $\frac{٢ط}{٣}$ جا ٣٣٠° − قا ($\frac{-٣٥ط}{٤}$) ظا ٩٠٠°

الحل

هنحول السالب لقياس موجب + ٣٦٠°

والى اكبر من ٣٦٠° هنطرح منه ٣٦٠°

جتا (−١٥٠° + ٣٦٠°) جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) + جتا $\frac{٢ \times ١٨٠}{٣}$ جا ٣٣٠° − قا $\frac{٥ \times ١٨٠}{٤}$ ظا (٩٠٠° − ٣٦٠° − ٣٦٠°)

جتا ٢١٠° جا ٢٤٠° + جتا ١٢٠° جا ٣٣٠° − قا ٢٢٥° ظا ١٨٠°

جتا (١٨٠° + ٣٠°) جا (١٨٠° + ٦٠°) + جتا (١٨٠° − ٦٠°) جا (٣٦٠° − ٣٠°) − قا ٢٢٥ × صفر

(− جتا ٣٠°) × (− جا ٦٠°) + (− جتا ٦٠°) × (− جا ٣٠°) − صفر

$\left[-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right] + \left[-\frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢}\right]$ − صفر $= \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = ١$



جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

الحل

جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠° + ٣٦٠°) + جتا (٩٣٠° − ٣٦٠° − ٣٦٠°) ظتا ٢٤٠°

جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (٦٠°) + جتا ٢١٠° ظتا (١٨٠° + ٦٠°)

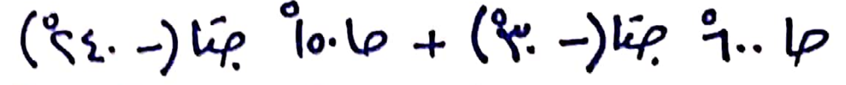
جا ٣٠° جتا ٦٠° + (− جتا ٣٠°) (ظتا ٦٠°)

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$

جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°)

ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

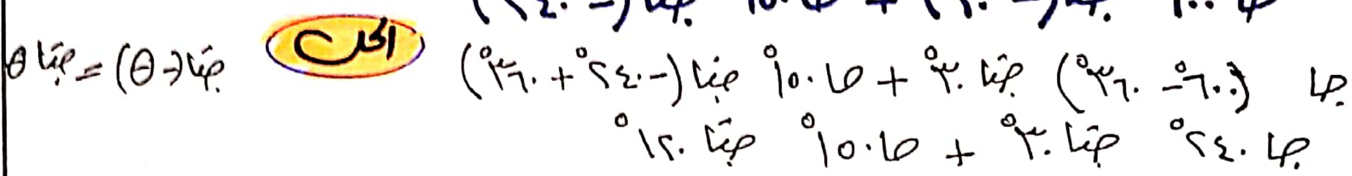
ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



جا ٦٠٠° جتا (−٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠°)

الحل

جتا (−θ) = جتا θ



جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) جتا ٣٠° + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠° + ٣٦٠°)

جا ٢٤٠° جتا ٣٠° + جا ١٥٠° جتا ١٢٠°

جا (١٨٠° + ٦٠°) جتا ٣٠° + جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (١٨٠° − ٦٠°)

(− جا ٦٠°) جتا ٣٠° + جا ٣٠° (− جتا ٦٠°)

$\left[-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right] + \left[\frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢}\right] = -\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = -١$



١) إذا كان جا α = جتا β فإن $\alpha \pm \beta = ٩٠° + ٣٦٠°$ ن

٢) قتا α = قا β فإن $\alpha \pm \beta = ٩٠ + ٣٦٠$ ن

٣) ظا α = ظتا β فإن $\alpha + \beta = ٩٠° + ١٨٠°$ ن

حيث ن = ٠، ١، ٢، ... ن ∈ ص

مثال ١ أوجد مجموعة حل المعادلة جا ٤θ = جتا ٢θ حيث θ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

$\frac{\pi}{٢} = \frac{١٨٠}{٢} = ٩٠°$

الحل

∵ جا ٤θ = جتا ٢θ

∴ $(٤\theta \pm ٢\theta) = ٩٠ + ٣٦٠°$ ن

إما $٦\theta = ٩٠° + ٣٦٠°$ ن

عندما ن = ٠: $٦\theta = ٩٠° + ٣٦٠ \times ٠$

$٦\theta = ٩٠$ ∴ $\theta = \frac{٩٠}{٦} = ١٥°$ تحقق

عندما ن = ١: $٦\theta = ٩٠ + ٣٦٠ \times ١$

$٦\theta = ٤٥٠$

$\theta = \frac{٤٥٠}{٦} = ٧٥°$ تحقق

عندما ن = ٢: $٦\theta = ٩٠ + ٣٦٠ \times ٢ = ٨١٠°$

$\theta = \frac{٨١٠}{٦} = ١٣٥°$ مرفوض

أو $٢\theta = ٩٠° + ٣٦٠°$ ن

ن = ٠: $٢\theta = ٩٠° + ٠$

$٢\theta = ٩٠°$ $\theta = \frac{٩٠}{٢} = ٤٥°$ تحقق

عندما ن = ١: ∴ $٢\theta = ٩٠ + ٣٦٠ \times ١$

$٢\theta = ٤٥٠$

$\theta = \frac{٤٥٠}{٢} = ٢٢٥°$ مرفوض

∴ م.ح = {١٥°، ٤٥°، ٧٥°}

---

٢) حل إذا كان جا $(٣\theta + ٢٠°)$ = جتا $(\theta - ٣٠°)$ حيث θ ∈]٠، ٩٠[

الحل

إما $٣\theta + ٢٠ + \theta - ٣٠ = ٩٠° + ٣٦٠$ ن

عندما ن = ٠: $٤\theta - ١٠° = ٩٠°$

$٤\theta = ١٠٠°$

$\theta = ٢٥°$

وكلها عند ن = ١ لا تحقق

أو $٣\theta + ٢٠° - (\theta - ٣٠°) = ٩٠° + ٣٦٠$ ن

عندما ن = ٠: $٢\theta + ٥٠° = ٩٠°$

$٢\theta = ٤٠°$ ∴ $\theta = ٢٠°$

∴ قيم θ هي ٢٥°، ٢٠°

مثال ٦ إذا كان ظا θ = ظتا ٢θ أوجد قيم θ حيث $\theta \in [0, \pi[$

الحل

$\theta + 2\theta = 90 + 180$ ن

$3\theta = 90 + 180$ ن

عندما ن = ٠ ∴ $3\theta = 90^\circ$

∴ $\theta = \frac{90}{3} = 30^\circ$ تحقق

عندما ن = ١ ∴ $3\theta = 90^\circ + 180^\circ$

$3\theta = 270^\circ$ ∴ $\theta = 90^\circ$ تحقق

عندما ن = ٢ ∴ $3\theta = 90 + 360^\circ$

$3\theta = 450^\circ$ ∴ $\theta = 150^\circ$ تحقق

عندما ن = ٣ ∴ $3\theta = 90^\circ + 540^\circ$

$3\theta = 630$ ∴ $\theta = 210^\circ$ مرفوض

∴ قيم θ ص = $\{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ\}$

مثال ٧ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية

(١) ٢ جا $\theta - 1 = 0$ ، $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

الحل

٢ جا $\theta = 1$ ∴ جا $\theta = \frac{1}{2}$

جا موجبة في الأول والثاني

لكن $\theta \in$ للربع الأول

∴ shift sin (1/2)

$\theta = 30^\circ$

م.ح = $\{30^\circ\}$

(٢) ٢ جتا $\theta - 1 = 0$ ، $\theta \in [0, 2\pi[$

الحل

٢ جتا $\theta = 1$ ، جتا $\theta = \frac{1}{2}$

جتا موجبة في الأول أو الرابع

الأول: 60°

الرابع: $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

∴ م.ح = $\{60^\circ, 300^\circ\}$

(٣) ٢ جتا $(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$ ← تغير ثاني

٢ جا $\theta = 1$

جا $\theta = \frac{1}{2}$ في الأول أو الثاني

الأول: 30°

الثاني: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

∴ م.ح = $\{30^\circ, 150^\circ\}$

(٤) ٤ جتا$^2 \theta - 3 = 0$ ، $\theta \in [0, 2\pi[$

الحل

٤ جتا$^2 \theta = 3$ ، جتا$^2 \theta = \frac{3}{4}$

جتا $\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

يعني موجبة (الأول والرابع)

سالبة (الثاني والثالث)

$\{30^\circ, 180^\circ - 30^\circ, 180^\circ + 30^\circ, 360^\circ - 30^\circ\}$

$= \{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$

اختبر الدرس ٤

(١) جتا θ + جتا(١٨٠ + θ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢جتا θ (د) جتا θ

جتا θ − جتا θ = ٠

(٢) إذا كان θ هي قياس الزاوية في وضعها القياسي وكان ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في (س ، −س) حيث س > ٠ فإن θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(+ ، −) في الربع الرابع

(٣) إذا كان جا α = جتا β فإن ظا(α + β) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) غير معرف (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

α + β = ٩٠° ظا ٩٠° غير معرف

(٤) إذا كان جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ظا(٩٠° − ٣θ) = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{3}$

(٥) إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي دائري وكان جا أ = $\frac{3}{5}$ فإن جا جـ = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $-\frac{3}{5}$ (جـ) $\frac{4}{5}$ (د) $-\frac{4}{5}$

في الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين مجموعهما ١٨٠

∴ جا جـ = جا(١٨٠ − أ) = جا أ = $\frac{3}{5}$

(٦) إذا كان ٧س = $\frac{\pi}{2}$ فإن

$\frac{\text{جا ٣س}}{\text{جتا ٤س}} + \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{ظتا ٥س}}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

∵ ٧س = ٩٠° ∴ جا ٣س = جتا ٤س ، ظا ٢س = ظتا ٥س

∴ ١ + ١ = ٢

(٧) جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ١٣٥° = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

لضربها جميعاً في جتا ٩٠ = ٠

(٨) إذا كان جتا² θ = ١ فإن θ = ... حيث ن ∈ ص

(أ) نπ (ب) $\frac{ن}{2}\pi$ (جـ) ٢نπ (د) (٢ن + ١)π

جتا θ = ±١ ، ٠ أو ١٨٠ أو ٣٦٠ وهكذا

= نπ

(٩) في الشكل المقابل

ص = $-\frac{3}{4}$ س + ٥

فإن ... = ...

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

∴ ظا θ = $\frac{4}{3}$



١ أوجد قيمة

١) جا ٢٤٠°
٢) ظا ١٣٥°
٣) قتا $\frac{11\pi}{6}$
٤) جتا (−٩٠٠°)
٥) ظا ٤٨٠°
٦) جتا (−٦٠°)

---

٢ أوجد قيمة

١) جا ١٥٠° ظا ٢٢٥° + جتا ٣١٥° قا(−٢١٠°) + جا (−١٣٥°) قتا(٢١٠°)

٢) جا ٦٠٠° جتا −٣٠° + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠°)

---

٣ أوجد إحدى قيم θ ∈]٠، ٩٠[

١) جا (٣θ + ١٥°) = جتا (٢θ − ٥°)
٢) ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣θ + ٣٠°)
٣) جتا ($\frac{θ + ٢٠°}{٢}$) = جا ($\frac{θ + ٤٠}{٢}$)

---

٤ حل المعادلات التالية]٠، ٢π[

١) ٢ جتا θ + ١ = ٠
٢) ٢ جتا θ − √٣ = ٠
٣) √٣ قتا θ = −٢
٤) ٥ ظا θ − ٥ = ٠

---

٥ أكمل

١) جا ٣٥° = جتا ...
٢) ظا ٢٤° = ظتا ...
٣) قا ٣٠° = قتا ...
٤) قتا ١٣° = قا ...
٥) قتا (٣٦ − θ) =
٦) إذا كان جا θ = جتا θ حيث θ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[فإن θ = ...
٧) إذا كان جتا θ = جا ٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا ٣θ = ...
٨) إذا كان ظتا ٢θ − ظا θ = ٠ حيث θ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[فإن θ = ...
٩) إذا كان جا α = جتا β فإن ظا (α+β) = ... غير معرف

احرص دائماً على رضا والديك وعلى صلات الأرحام.

لا تنسونا من صالح الدعاء.

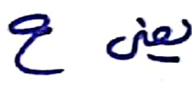
الدرس الخامس
التمثيل البياني للدوال المثلثية

كل من الدالتين

د(θ) = م جا ب θ ، د(θ) = م جتا ب θ

* دورتها = $\frac{2\pi}{|ب|}$
* ومداها = [-م ، م]

والمجال دائماً]-∞ ، ∞[يعني ح



① د(θ) = ٢ جا θ

دورتها = ٢π

ومداها = [-٢ ، ٢]

القيمة العظمى = ٢ والقيمة الصغرى = -٢

② د(θ) = ٣ جتا ٢θ

دورتها = $\frac{2\pi}{2}$ = π

ومداها = [-٣ ، ٣]

القيمة العظمى = ٣ القيمة الصغرى = -٣

③ د(θ) = جا -٣θ

دورتها = $\frac{2\pi}{3}$

مداها [-١ ، ١]

④ د(θ) = ٧ جتا -٤θ

دورتها = $\frac{2\pi}{4}$ = $\frac{\pi}{2}$

ومداها = [-٧ ، ٧]

القيمة العظمى = ٧ القيمة الصغرى = -٧

⑤ د(θ) = ٥ ظا θ

دورتها =

مداها =

⑥ د(θ) = ٣ جتا ٧θ

دورتها =

مداها =

القيمة العظمى = الصغرى =

المجال = - - - -

⑦ د(θ) = ٣ جا(-٨θ)

دورتها =

مداها =

القيمة العظمى = - - - الصغرى = - - -

المجال = - - -

د(θ) = ظا θ

دورتها =

مداها =

د(θ) = جتا θ

دورتها =

مداها =



اختر

(١) مدى الدالة د: د(θ) = جا θ هو ....

(أ) {-١ ، ١} (ب) [-١ ، ١] (ج)]-١ ، ١[(د)]-∞ ، ∞[

(٢) القيمة العظمى للدالة ع: ع(θ) = ٥ جتا θ هى ....

(أ) صفر (ب) ٥ (ج) ∞ (د) ١

(٣) الدالة د: د(θ) = ٣ جا ٤θ دورتها ....

(أ) 2π (ب) π (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(٤) الشكل المقابل يمثل ص = د(س) فإن

(أ) ص = ٢ جا س (ب) ص = جا ٢س (ج) ص = ٢ جا ٢س (د) ص = جا س

المنحنى يمر بنقطة الأصل جا(٠) = ٠

مداها [-٢ ، ٢] دورتها π ، $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(٥) الشكل المقابل

(أ) ص = جا θ (ب) ص = جتا θ (ج) ص = ٢ جتا θ (د) ص = ٢ جا θ

(٦) الدالة ص = جا($\frac{\pi}{4}$ + س) تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $-\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) صفر

أقصى قيمة لـ جا ٩٠ = ١ ∴ س = ٤٥ = $\frac{\pi}{4}$

(٧) إذا كانت د(س) = أ جتا ب س حيث أ > ٠ دورتها $\frac{\pi}{2}$ ومداها [-١ ، ١] فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{4}$ (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

أ = ١ ، $\frac{2\pi}{ب} = \frac{\pi}{2}$ ∴ ب = ٤ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{4}$

(٨) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٢س مع محور السينات فى [٠ ، ٢π] يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٧

دورتها = $\frac{2\pi}{2}$ = ١٨٠ يتقطع فيها مرتين ، $\frac{360}{180}$ = ٢

٣×٢ = ٦ + ١ عند الصفر = ٧

وهما عند ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ ...

هنيئاً..

لمن بات والناس يدعون له،

وويل لمن نام والناس يدعون عليه،

وبشرى لمن أحبته القلوب،

وخسارة لمن لعنته الألسن.

يارب سخر لنا من عبادك

من يدعون لنا بالخير..

الدرس السادس

إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدى نسبها المثلثية

الخطوات

١) تحديد الربع الذى تقع فيه θ حسب الإشارة.

٢) توجد قياس الزاوية الحادة

shift sin   shift cos   shift tan

بدون إشارة

٣) ننسب الزاوية للربع الذى تقع فيه

- الأول: كما هى
- الثانى: $180 - \alpha$
- الثالث: $180 + \alpha$
- الرابع: $360 - \alpha$

θ | $180 - \theta$ | $180 + \theta$ | $360 - \theta$

مثال ١: أوجد قيمة θ إذا كان

١) $\text{جا}\,\theta = \frac{1}{2}$

الحل

الإشارة موجبة ∴ الزاوية فى الربع الأول أو الثانى

توجد الزاوية الحادة

shift sin $\frac{1}{2} = 30°$

الأول: $30°$

الثانى: $180° - 30° = 150°$

∴ $\theta = 30°$ أو $150°$

٢) $\text{جتا}\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

الحل

جتا θ سالبة فى الثانى والثالث

shift cos $\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$

الثانى: $180 - 45 = 135°$

الثالث: $180 + 45 = 225°$

∴ $\theta = 135°$ أو $225°$

٣) $\text{ظا}\,\theta = -\sqrt{3}$

الحل

ظا θ سالبة فى الثانى والرابع

shift tan $\sqrt{3} = 60°$

الثانى: $180° - 60° = 120°$

الرابع: $360 - 60 = 300°$

∴ $\theta = 120°$ أو $300°$

٤) $\text{جا}\,\theta = \frac{-1}{2}$ حيث θ أصغر زاوية موجبة

الحل

جا θ سالبة فى الثالث والرابع

$180 + 30 = 210°$ أو $360 - 30 = 330°$

∴ θ أصغر زاوية موجبة ∴ $\theta = 210°$

مثال ٢

أوجد θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتي تحقق جا θ = ٠٫٧٤٢١

الحل

جا θ موجبة في الأول والثاني

θ = shift sin 0.7421 = 47° 55′

في الأول = ٤٧° ٥٥′

في الثاني = ١٨٠ − ٤٧° ٥٥′ = ١٣٢° ٥′

مثال ٣

إذا قطع الضلع النهائي لزاوية موجبة قياسها θ في وضعها القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب(−٦/١٠ ، ٨/١٠) فأوجد ق(θ) حيث ٠° < θ < ٣٦٠°

الحل

جا θ = ٨/١٠ ← الأول ، الثاني

جتا θ = −٦/١٠ ← الثاني ، الثالث

∴ الزاوية تقع في الربع الثاني

Shift sin 8/10 = ٥٣° ٧′ ٤٨″

∴ θ = ١٨٠° − ٥٣° ٧′ ٤٨″ = ١٢٦° ٥٢′ ١٢″

ثلاثيات فيثاغورث

٣	٤	٥
٦	٨	١٠
٩	١٢	١٥
١٥	٢٠	٢٥
٥	١٢	١٣
٨	١٥	١٧



مثال ٤

أوجد الدوال المثلثية لكل مما

١) جا θ = −٨/١٧ حيث ٢٧٠° < θ < ٣٦٠°

الحل

خليك فاكر إنه انت شغال في الربع الرابع يعني جتا موجبة ، (جا وظا) سالبين

(مثلث: وتر ١٧ ، مقابل ٨ ، مجاور ١٥)

من فيثاغورث ∴ المجاور = √((١٧)² − (٨)²) = ١٥

جا θ = −٨/١٧

جتا θ = ١٥/١٧

ظا θ = −٨/١٥

٢) ظا β = ٥/١٢ حيث β أكبر زاوية موجبة ، ٠ < β < ٣٦٠°

الحل

∵ ظا β موجبة ∴ تقع في الأول أو الثالث

، ∵ β أكبر زاوية موجبة

∴ β في الربع الثالث

(مثلث: وتر ١٣ ، مقابل ٥ ، مجاور ١٢)

من فيثاغورث ∴ الوتر = √((٥)² + (١٢)²) = ١٣

∴ جا β = −٥/١٣

جتا β = −١٢/١٣

ظا β = ٥/١٢

ونحط الإشارات الربع الثالث

اختر

① إذا كان ص = جتا θ فإن θ = ...
(أ) $جا^{-1}$ ص (ب) $جتا^{-1}$ ص (ج) $ظا^{-1}$ ص (د) $جتا^{-1}$ θ

② إذا كان θ = $ظا^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠° فإن θ = ...
(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (ج) ١٥٠° (د) ٢١٠°

③ إذا كان θ = $جا^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث θ أصغر زاوية موجبة فإن θ = ...
(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (ج) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

④ القياس الستينى لأصغر زاوية موجبة تحقق $جا^{-1}$(-٦,٠) هو ....
(أ) ٣٦° ٥٢ (ب) ٨ ١٤٣° (ج) ٥٢ ٢١٦° (د) ٨ ٣٢٣°

فى الربع الثالث ١٨٠ + $جا^{-1}$ ٦,٠ =

⑤ فى الشكل المقابل

أ ، ب ، جـ ، ٣سم ، ٤سم

ق(أ ب̂ جـ) = ...
(أ) $جا^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (ب) $جا^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (ج) $ظا^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (د) $ظتا^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

ظا ب = $\frac{3}{4}$ ∴ ب = $ظا^{-1}\frac{3}{4}$

⑥ جا (جتا$^{-1}$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)) = ...
(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) ٣٠° (د) ٦٠°

$جتا^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٣٠° ∴ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

⑦ قتا (جتا$^{-1}$ ٠) = ...
(أ) ١ (ب) -١ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) صفر

$جتا^{-1}$ ٠ = ٩٠° قتا ٩٠ = $\frac{1}{جا ٩٠}$ = $\frac{1}{1}$ = ١

⑧ $ظا^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ + $ظتا^{-1}\sqrt{3}$ = ...
(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

$ظا^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ + $ظا^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ = ٣٠ + ٣٠ = ٦٠°

⑨ $جتا^{-1}$ س + $جا^{-1}$ س = ...
(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

ملحوظة هامة

الأس -١ ده معناه الدالة العكسية
بدلاً من sin جا
نعمل shift sin $جا^{-1}$

مثال ٥ إذا كان جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

فأوجد جا $(١٨٠ - \theta)$ + ظا $(٣٦٠ - \theta)$ + ٢جا $(٢٧٠ - \theta)$

الحل

∵ $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

∴ جا $\theta = \frac{٤}{٥}$

جتا $\theta = \frac{-٣}{٥}$

ظا $\theta = \frac{-٤}{٣}$

لأنها فى الربع الثانى

(مثلث: الوتر ٥ ، المقابل ٤ ، المجاور ٣ ، الزاوية θ)

المقدار جا $(١٨٠ - \theta)$ = جا θ

ظا $(٣٦٠ - \theta)$ = − ظا θ

٢جا $(٢٧٠ - \theta)$ = −٢ جتا θ

= جا θ − ظا θ − ٢ جتا θ

= $\frac{٤}{٥} - (\frac{-٤}{٣}) - (٢ \times \frac{-٣}{٥}) = ٣\frac{١}{٣}$

مثال ٦ إذا كان ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$ حيث $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$

فأوجد قيمة جتا $(٣٦٠ - \theta)$ − جتا $(٩٠ - \theta)$

الحل

جا $\theta = \frac{-٣}{٥}$

جتا $\theta = \frac{-٤}{٥}$

ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$

فى الربع الثالث

(مثلث: الوتر ٥ ، المقابل ٣ ، المجاور ٤ ، الزاوية θ)

جتا $(٣٦٠ - \theta)$ = جتا θ

جتا $(٩٠ - \theta)$ = جا θ

= جتا θ − جا θ = $\frac{-٤}{٥} - (\frac{-٣}{٥}) = \frac{-١}{٥}$

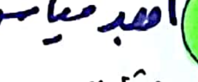




١ أوجد قيمة θ حيث $\theta \in]٠ ، ٢\pi[$

(١) جا $\theta = \frac{١}{٢}$ (٢) جتا $\theta = \frac{-١}{٢}$

(٣) ظا $\theta = -\sqrt{٣}$ (٤) ظتا $\theta = \sqrt{٣}$



٢ أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق

(١) جتا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (٢) ظا $\theta = ١$

(٣) جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٤) جتا $\theta = ٠.٧$



٣ إذا قطع الضلع النهائى فأوجد قيمة $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$

(١) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢})$ (٢) $(\frac{-١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$

(٣) $(\frac{٦}{١٠} ، \frac{-٨}{١٠})$

---

٤ إذا كان ٧ قتا θ = ٢٥ ، فأوجد حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ فأوجد القيمة العددية للمقدار

ظا $(\pi + \theta)$ − ظتا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$

$(\theta + ٢٧٠) = (٩٠ - \theta)$

انتهى الجبر وحساب المثلثات

مع أطيب تمنياتى للطلبة بالنجاح والتفوق

محمد أدهم